目 录

第一章 预备知识

平面解析几何研究的对象是平面上的点及平面上的点的轨迹——平面曲线。研究的方法是坐标法，即通过建立坐标系，使平面上的点与一对有序实数（点的坐标）建立一一对应的关系，进而建立平面曲线（包括直线）与二元方程间的对应关系，通过研究方程达到研究平面曲线的目的。

空间解析几何研究的对象是空间的点及空间点的轨迹——空间曲线和曲面。研究的方法除了坐标法外，还有向量法。这两种方法的应用和相互转换，为我们通过研究方程达到研究空间的曲线和曲面的目的带来很大的方便。

学习本章的要求：

1．理解空间直角坐标系的概念，掌握两点间的距离公式。

2．掌握向量、向量的模、向量的投影式、单位向量等概念和有关的计算公式。

3．熟记向量的数量积与向量积、两向量平行、垂直的充分必要条件。

4．掌握平面的点法式与直线的标准方程，了解其它类型的方程，会作简单的平面图形。

5．掌握几种特殊二次曲面（圆球面、椭球面、柱面、椭圆抛物面、圆锥面）的方程，并会画它们的图形。

一、空间直角坐标系

问：怎样建立空间直角坐标系？

答：过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，这就建立了空间直角坐标系。其中 O 称为原点，Ox、Oy、

Oz分别称为x轴、y轴、z轴（如图1—1）。

空间直角坐标系又可分为右手系和左手系。若一坐标系，用右手四指由x轴正向到y轴正向的方向握住z轴，姆指恰好指向z轴正向（如图1—2），则称为右手系。反之称为左手系。我们通常采用右手系。

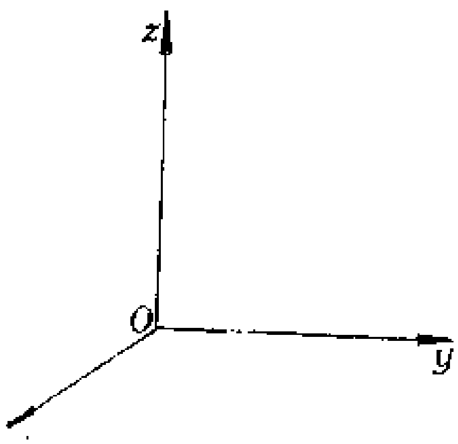


图 1—1

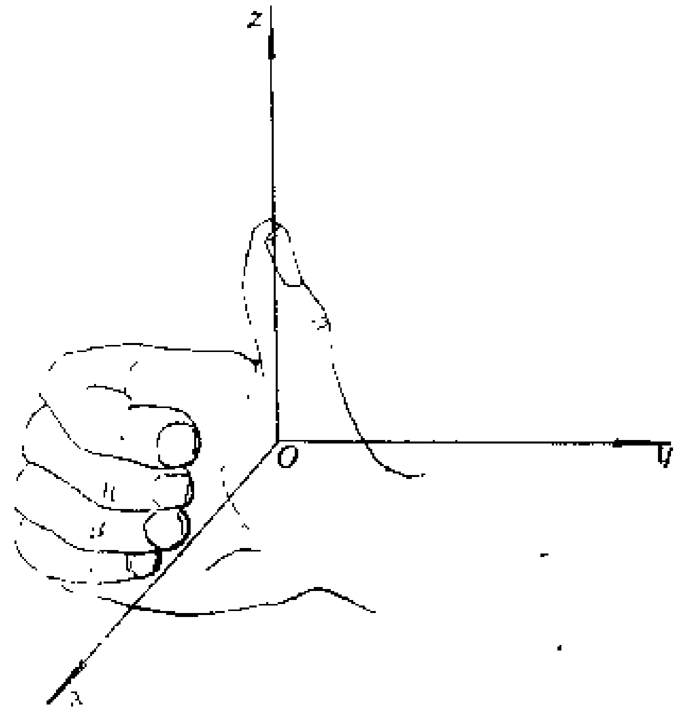


图 1—2

问：空间直角坐标系的八个卦限是怎样规定的？

答： 空间直角坐标系中的x轴和y轴、y轴和z轴、x轴和z轴所决定的平面分别称为xy平面、yz平面、xz平面，这三个平面统称坐标平面。

三个坐标平面把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限。

如图1—3，以正的x、y、z轴为棱的卦限为第Ⅰ卦限，它的后面以负x轴、正y轴、正z轴为棱的卦限为第Ⅱ卦限，第Ⅱ卦限的左边以负x轴、负y轴、正z轴为棱的卦限是第Ⅲ卦限，第Ⅲ卦限的前面以正x轴、负y轴、正z轴为棱的卦限是第Ⅳ卦限，第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限的下面依次为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限。

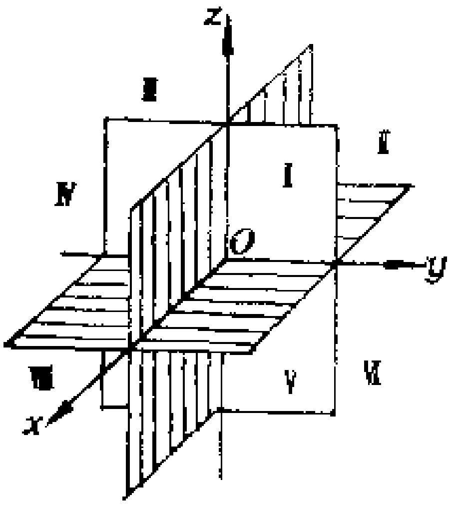


图 1—3

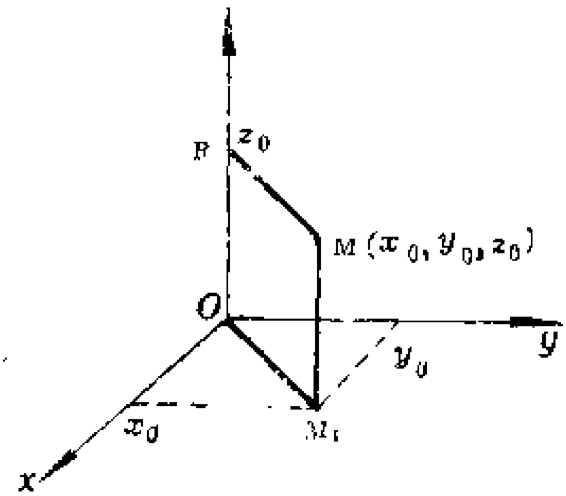


图 1—4

问：在每一卦限中，坐标的符号是怎样的？

答：由图1—3易知，八个卦限中坐标的符号依次为：

Ⅰ（+，+，+）、Ⅱ（−，+，+）、

Ⅲ（−，−，+）、Ⅳ（+，−，+）、

Ⅴ（+，+，−）、Ⅵ（−，+，−）、

Ⅶ（−，−，−）、Ⅷ（+，−，−）。

问：在空间直角坐标系中，任意一点与它的坐标之间的关系如何？

答：过空间任一点M作xy平面的垂线，与xy平面交于M_1（如图1—4），即M_1是M在xy平面上的投影。设M_1点在xy平面上的坐标为（x_0，y_0），再过M点作与OM_1平行的直线，与z轴交于R点，R点在z轴上的坐标为z_0，则空间任一点M的位置可用三个有序实数（x_0，y_0，z_0）来表示，这一组有序实数（x_0，y_0，z_0）就称为点M在空间直角坐标系$Oxyz$中的空间直角坐标。

反过来，任给一组有序实数（x_0，y_0，z_0），在空间直角坐标系中都可以确定一个以这三个有序实数为坐标的点M。确定M点的方法是：先以（x_0，y_0）为平面直角坐标在xy平面上确定一点M_1；再以z_0为数轴上的坐标确定z轴上的一点R；过M_1作

xy平面的垂线，过R作与OM_1平行的直线，两直线的交点M就是以（x_0, y_0, z_0）为空间直角坐标的点。

总之，建立空间直角坐标系之后，空间中任一点M都可以确定一组有序实数（x_0, y_0, z_0）为它的空间直角坐标；反过来，任给一组有序实数（x_0, y_0, z_0），又可以确定空间中一点M以（x_0, y_0, z_0）为其空间直角坐标。这样，空间中的点就与三个实数组成的有序数组建立了一一对应关系。

问：坐标原点以及x轴、y轴、z轴上任一点的坐标各是什么？

答：坐标原点的坐标为（0，0，0），x轴上任一点的坐标为（x, 0，0），y轴上任一点的坐标为（0, y, 0），z轴上任一点的坐标为（0, 0, z）。

问：在空间直角坐标系中，如何根据下列各点的坐标画出各点？

M（2，4，3），N（1，2，−3），P（−1，−2，−3），Q（0，1，2），R（−1，−1，0）。

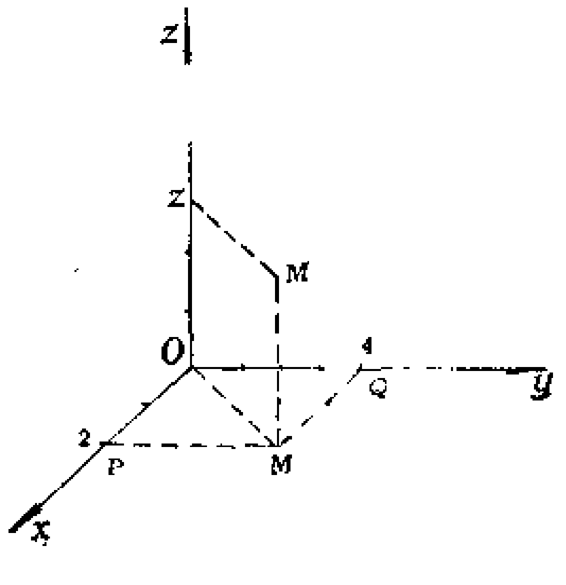


图 1—5

答：M点在第Ⅰ卦限，按照图1—5所示的画法，即可确定点M（先在xy平面上画出点M_1(2，4)，注意：$M_1Q \parallel x$轴，$PM_1 \parallel y$轴。再过M_1作z轴的平行线，在其上取$M_1M=3$，则M点即为所求）。

点N在第Ⅴ卦限，按照图1—6所示的画法，即可确定点N。点P在第Ⅶ卦限，按照图1—7所示的画法即可确定点P。

由于$x=0$，所以Q点在yz平面上（如图1—8）。由于$z=0$，所以R点在xy平面上（如图1—9）。

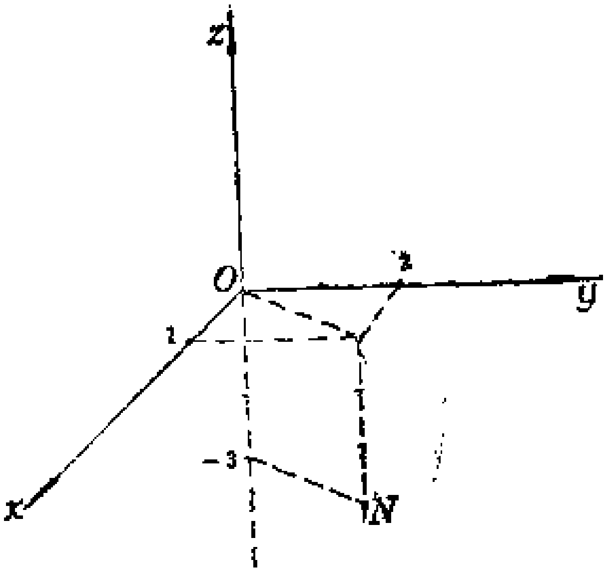


图 1—6

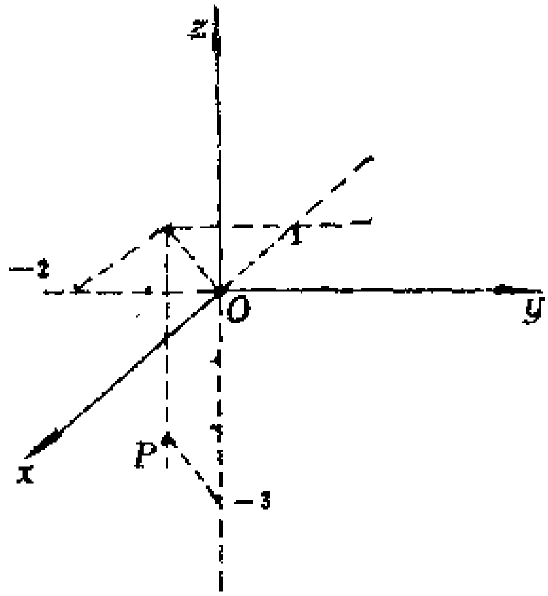


图 1—7

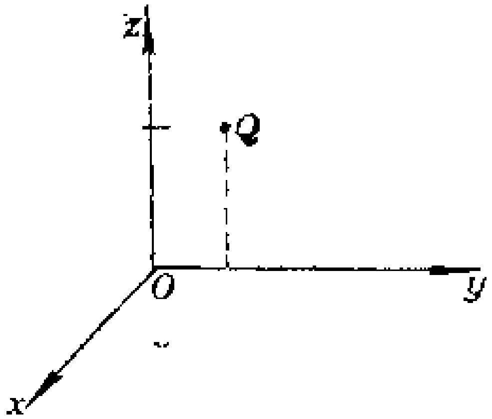


图 1—8

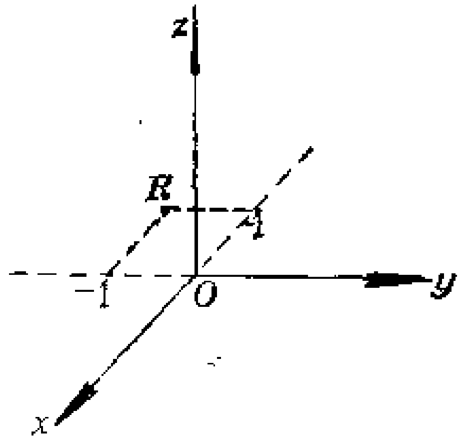


图 1—9

问：若点$P(x, y, z)$在第Ⅰ卦限，则关于三个坐标面与P点对称的点的坐标是什么？

答：关于坐标面xy与P点对称的点的坐标是$(x, y, -z)$；关于坐标面yz与P点对称的点的坐标是$(-x, y, z)$；关于坐标面xz与P点对称的点的坐标是$(x, -y, z)$。

问：在空间直角坐标系的第Ⅰ卦限有两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和$M_2(x_2, y_2, z_2)$，怎样求M_1和M_2之间的距离？

答：过M_1与M_2各作分别平行于坐标面的平面，这六个平面围成如图1—10所示的长方体，这个长方体的三条棱长$AC=x_2-$

x_1，$BA=y_2-y_1$，$AM_2=z_2-z_1$，因为$\angle M_1BA$和$\angle M_1AM_2$都是直角，由勾股定理，得

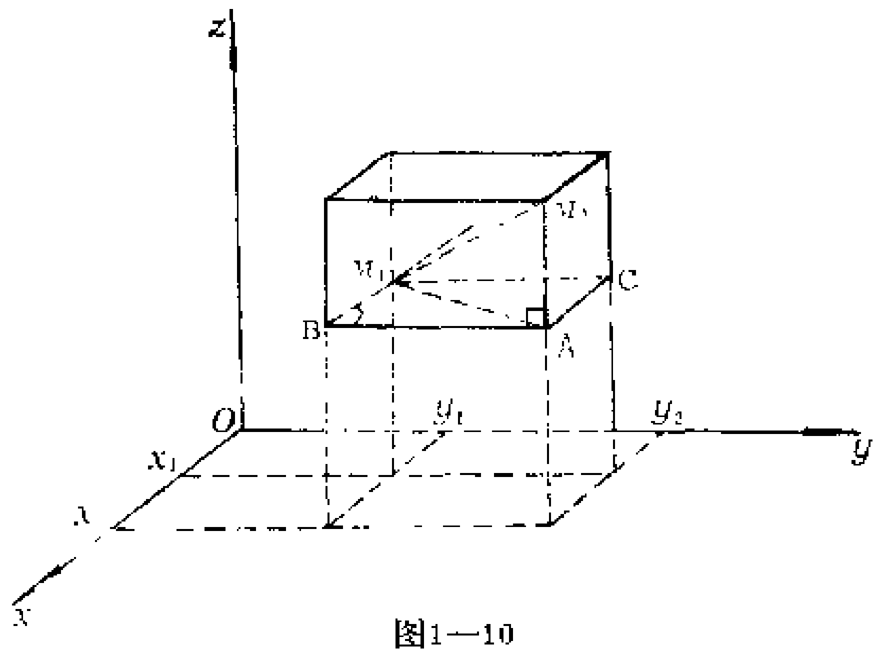


图1—10

$$
\begin{aligned}
|M_1M_2|^2 &= |M_1A|^2+|AM_2|^2 \\
&= |BM_1|^2+|BA|^2+|AM_2|^2 \\
&= |AC|^2+|BA|^2+|AM_2|^2 \\
&= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad |M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是M_1和M_2之间的距离.

顺便指出，M_1和M_2无论在哪个卦限，这个求空间两点间的距离公式都是对的.

二、向　　量

问：什么是向量？在学习向量时应注意什么问题？

答：我们把既有大小又有方向的量称为向量（或矢量）。例如，物理中的速度、加速度、力、…都是向量，几何中的有向线段也是向量.

在学习向量时，应注意向量具有两种属性，即：大小和方

向。例如，在研究速度时，不仅要考虑速度的大小，而且还要注意物体以这个速度向哪个方向运动。

问：在几何上如何表示向量？

答： 在几何上向量通常用空间的一个有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 来表示（如图1—11）。在取定单位之后，有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的大小，称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，箭头指示向量的方向。在图1—11中，A 点称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点，B 点称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点。向量除用起点 A 到终点 B 的字母上面加箭头表示以外，还表示为 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$ 等，在印刷体中还常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 等来表示。



图 1—11

长度等于零的向量称为零向量，用记号 $\vec{o}$ 来表示，零向量的方向可以看作是任意的。

向量的模用绝对值表示。例如，向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模表示为 $|\overrightarrow{AB}|$；向量 $\vec{a}$ 的模表示为 $|\vec{a}|$。

问：$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是同一个向量吗？

答： 不是。向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点为 A，终点为 B，其方向是由 A 指向 B。而向量 $\overrightarrow{BA}$ 的起点为 B，终点为 A，其方向是由 B 指向 A。所以，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 是两个模相等而方向相反的向量。

问：$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ 吗？

答： 相等。这是因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的方向虽然不同，但它们的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\overrightarrow{BA}|$ 是相等的。

问：什么是自由向量？

答： 只考虑向量的大小与方向，而不管向量的起点在什么地方。即能平移到任意始点的向量称为自由向量。

如果两个向量的方向相同，模也相等，则称这两个向量是相等的。显然，一个向量经过平行移动后仍与原向量相等。如图1—12所示。向量 $\overrightarrow{CD}$ 是由 $\overrightarrow{AB}$ 平移得到的，于是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。

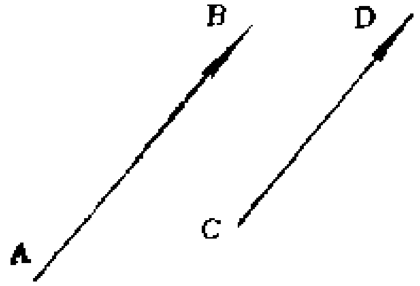


图 1—12

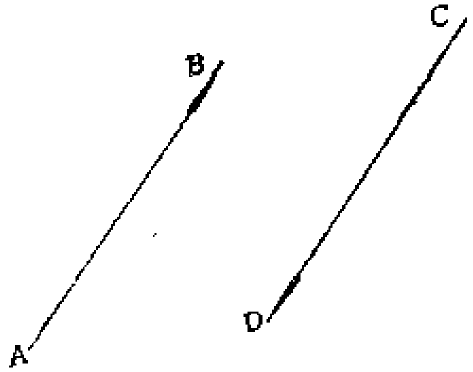


图 1—13

问：若$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$吗？

答：不一定。当$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，但$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的方向不相同时，$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$。只有当$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，且$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的方向相同时，才有$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。

问：若$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$吗？

答：不一定.因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$与$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$都不能保证$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的方向相同。如图1—13所示，虽然有$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，但$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$。

问：将$\overrightarrow{AB}$以起点A为中心，转动角度θ后得$\overrightarrow{AB'}$，是否$\overrightarrow{AB}$一定不等于$\overrightarrow{AB'}$？

答：不一定。当转动的角度$\theta=2k\pi$（k为整数）时，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AB}$重合，此时，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$。若$\theta\neq2k\pi$，则$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{AB'}$（图1—14）。

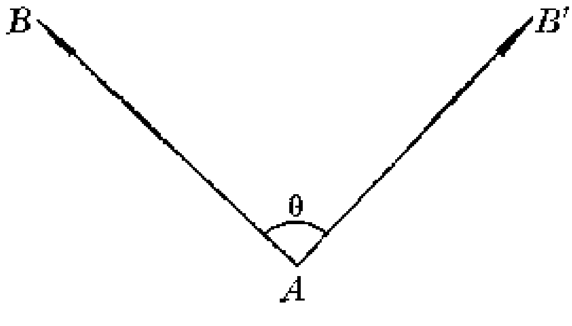


图 1—14

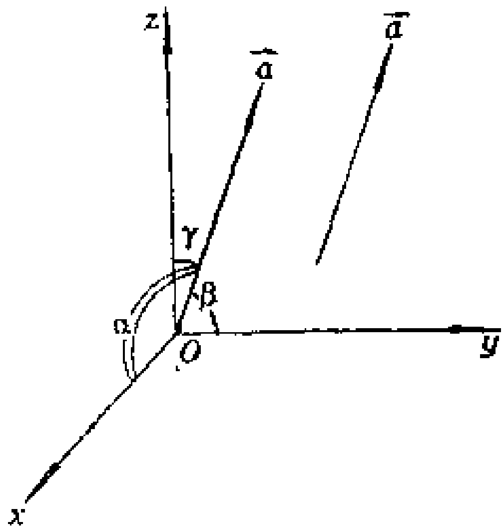


图 1—15

问：如何在空间直角坐标系中表示向量的方向？

答： 我们知道，向量经过平移后，其大小与方向都不变，为了在确定的空间直角坐标系中表示任意一个向量 $\vec{a}$ 的方向，可将 $\vec{a}$ 平移，使 $\vec{a}$ 的起点与原点O重合，这样 $\vec{a}$ 的方向就可以用 $\vec{a}$ 的正方向与x轴、y轴、z轴的正方向的夹角α、β、γ表示（图1—15），并称α、β、γ为 $\vec{a}$ 的方向角。

为了方向角的唯一性，我们规定：

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

显然，若 $\vec{a}$确定，则 $\vec{a}$ 的三个方向角就唯一地确定了．反之，若 $\vec{a}$ 的三个方向角确定了，则 $\vec{a}$ 的方向也就唯一地确定了。

问：什么是向量在坐标轴上的投影？

答： 如果向量$\overrightarrow{OM}$ 的起点在坐标原点，终点 M 的坐标为（x, y, z），则称三个坐标轴上的有向线段 Ox、Oy、Oz 的数量 x、y、z为向量$\overrightarrow{OM}$分别在x轴、y轴、z轴上的投影（图1—16）。

显然，向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影不是向量而是数量，且分别等于点M的坐标x, y, z。

从图1—16可以看出，如果 $\overrightarrow{OM}$的三个方向角为 α, β, γ，则有

$$x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,$$
$$y=|\overrightarrow{OM}|\cos\beta,$$
$$z=|\overrightarrow{OM}|\cdot\cos\gamma.$$

我们称$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$的方向余弦。向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影 x、y、z 的正负由方向角（或方向余弦）决定。

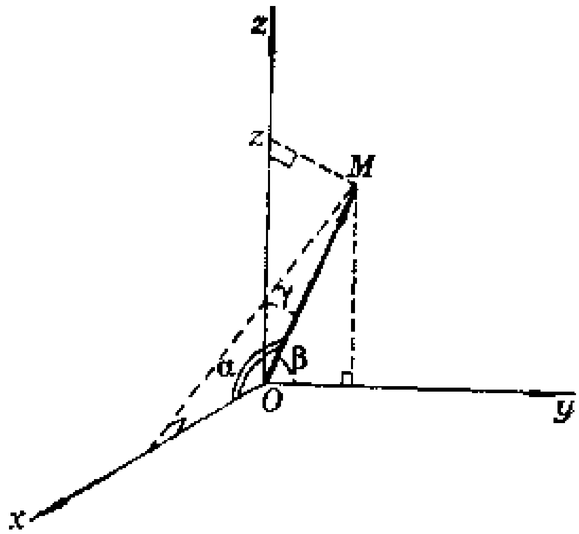


图 1—16

如果向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点不在坐标原点，设起点M_1的坐标为（x_1, y_1, z_1），终点M_2的坐标为（x_2, y_2, z_2），则

$\overrightarrow{M_1M_2}$ 在三个坐标轴上的投影分别为：

$$a_1=x_2-x_1,\ a_2=y_2-y_1,\ a_3=z_2-z_1.$$

如果 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角为 α、β、γ，则

$$a_1=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha,\ a_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta,$$

$$a_3=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma.$$

问：在空间直角坐标系中，向量如何用它在坐标轴上的投影来表示？

答：在空间直角坐标系中，对于起点在坐标原点，终点坐标为 (x, y, z) 的向量 $\overrightarrow{OM}$（如图1—17），有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M},$$

而 $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}$，$\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OR}$。

$$\therefore\quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

若在 x 轴、y 轴、z 轴上分别沿正方向取三个模数为1的单位向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，则

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k}.$$

所以，起点在坐标原点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 表示为：

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

这就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 的投影表达式，其中 x、y、z 为 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影。

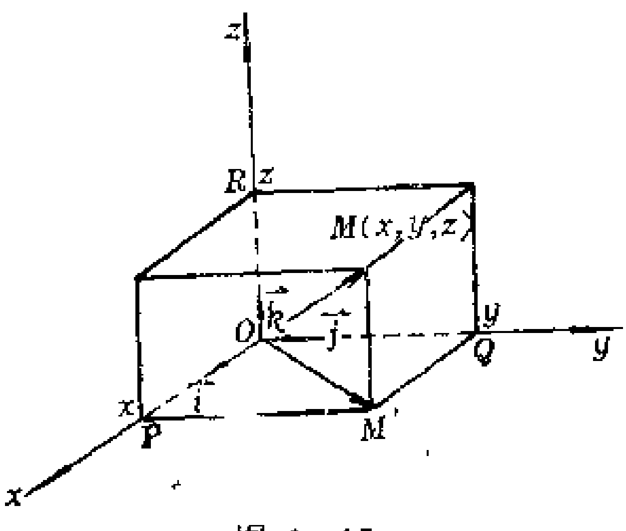


图 1—17

类似地，起点不在坐标原点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$（设 M_1，$(x_1$，

$y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2))$ 的投影表达式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$$

其中，x_2-x_1、y_2-y_1、z_2-z_1 分别为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y轴、z轴上的投影。

问：在空间直角坐标系中，向量的模数如何用它在坐标轴上的投影来表示？

答： 在空间直角坐标系中，由两点$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$所确定的向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}$。向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$的模数即为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$，由空间两点间的距离公式，有

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是说，向量的模数等于它在三个坐标轴上投影的平方和的算术根。

问：在空间直角坐标系中，向量的方向余弦如何用它在坐标轴上的投影来表示？

答： 在空间直角坐标系中，如果向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$的方向角为α、β、γ，则 $\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴、y轴、z轴上的投影分别为：

$$a_1=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha,\quad a_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta,$$
$$a_3=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma.$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{a_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

问：在空间直角坐标系中，有下面三个向量：

$$\vec{a}_1=\vec{i}-2\vec{k},\quad \vec{a}_2=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k},$$
$$\vec{a}_3=\vec{j}+\vec{k},$$

如何求这三个向量的和向量$\vec{a}$？又$\vec{a}$的方向角为何？

答： 我们知道，两个向量

$$\vec{b}_1=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k},$$

$$\vec{b}_2=n_1\vec{i}+n_2\vec{j}+n_3\vec{k}.$$

的和向量为

$$\vec{b}_1+\vec{b}_2=(m_1+n_1)\vec{i}+(m_2+n_2)\vec{j}+(m_3+n_3)\vec{k}.$$

所以，三个向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$的和向量为：

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3\\&=(1+2+0)\vec{i}+(0-3+1)\vec{j}+(-2+4+1)\vec{k}\\&=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}.\end{aligned}$$

$\because$ $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{22}$,

则 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{22}}$, $\cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{22}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{22}}$.

$\therefore$ $\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{22}}\approx50°14'$,

$\beta=\arccos\frac{-2}{\sqrt{22}}\approx115°14'$,

$\gamma=\arccos\frac{3}{\sqrt{22}}\approx50°14'$.

三、向量的数量积与向量积

问：什么是向量的数量积？学习数量积时，应注意什么问题？

答：两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模数$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$与这两向量夹角θ的余弦的乘积($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)，称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积(或称点积)，记为：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.$$

学习向量的数量积时，应注意下面几点：

(1) 向量的数量积是一个数量，不是一个向量。

(2) 向量的数量积满足乘法交换律和分配律，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

(3) 向量的数量积的正负取决于这两个向量的夹角θ。

当 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$;

当　$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

当　$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$时，$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$。

（4）在物理学中，力$\vec{F}$沿$\overrightarrow{AB}$所做的功$\overline{W}$可以用数量积表示，即

$$\overline{W}=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\theta,$$

其中θ为力$\vec{F}$与位移$\overrightarrow{AB}$的夹角（如图1—18）。

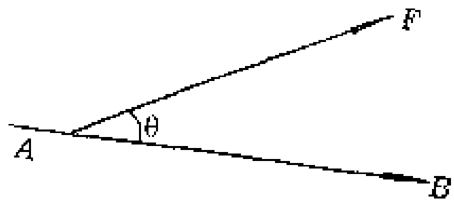


图 1—18

问：若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的模数相等但方向相反，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于什么？

答：　$\because$　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，且$\theta=\pi$，

$\therefore$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

$=|\vec{a}|^2\cdot\cos\pi$

$=-|\vec{a}|^2$。

问：若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于什么？

答：由于$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则夹角$\theta=\frac{\pi}{2}$，所以，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$。

问：若$\vec{a}$、$\vec{b}$为非零向量，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$是否一定垂直？

答：一定垂直。因为两向量的夹角$\theta\in[0,\pi]$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$为非零向量，即$|\vec{a}|\neq0$，且$|\vec{b}|\neq0$，由于$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=0$，所以$\cos\theta=0$，故$\theta=\frac{\pi}{2}$。这表明，$\vec{a}$与$\vec{b}$是垂直的。

又由上一问，若$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，因此，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$是两个非零向量相互垂直的充分必要条件。

问：空间直角坐标系中，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为x轴、y轴、z轴上的

单位向量，如何求：

(1) $\vec{i}\cdot\vec{j}$； (2) $\vec{k}\cdot\vec{j}$； (3) $\vec{i}\cdot\vec{i}$； (4) $\vec{k}\cdot\vec{k}$。

答：(1) ∵ $\vec{i}$ 与 $\vec{j}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

(2) ∵ $\vec{k}$ 与 $\vec{j}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore\quad \vec{k}\cdot\vec{j}=|\vec{k}|\cdot|\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

(3) ∵ $\vec{i}$ 与 $\vec{i}$ 的夹角 $\theta=0$，

$$\therefore\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cos 0=1.$$

(4) 同理，$\vec{k}\cdot\vec{k}=1$。

问：有三个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则必有 $\vec{b}=\vec{c}$ 吗？

答：不一定。我们知道，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Longleftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0\Longleftrightarrow\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})=0.$$

若 $\vec{b}\neq\vec{c}$，即 $\vec{b}-\vec{c}\neq o$，但若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{c}$ 垂直，则有 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$

若 $\vec{b}=\vec{c}$，即 $\vec{b}-\vec{c}=\boldsymbol{o}$，也有

$$\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})=0.$$

问：向量的数量积如何用它们的投影来表示？

答：设两个向量为

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},$$

则
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_1\vec{i}\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\vec{k}+a_2b_1\vec{j}\vec{i}\\&\quad+a_2b_2\vec{j}\vec{j}+a_2b_3\vec{i}\vec{k}+a_3b_1\vec{i}\vec{k}+a_3b_2\vec{j}\vec{k}\\&\quad+a_3b_3\vec{k}\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

$$\because\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\vec{k}=0,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$

$$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

这是一个非常重要的计算公式。它表明：要求两个向量的数量积，只要把这两个向量在坐标轴上对应的投影相乘，然后求和即可，有了这个公式，就可以将两个向量垂直的充要条件表示为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

问：如何求向量$\vec{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$的模？其中$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 1$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角 $\theta = \frac{\pi}{3}$.

答：因为$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cos 0$，则

$$|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{a})$$
$$= 4\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{a} + 9\vec{b}^2$$
$$= 4|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}| \cos\frac{\pi}{3} + 9|\vec{a}|^2$$
$$= 4 \times 2^2 + 12 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + 9 \times 1^2$$
$$= 37.$$
$$\therefore \quad |\vec{A}| = \sqrt{37}.$$

问：如何求向量$\vec{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$与向量$\vec{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$的夹角？其中$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 1$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\beta = \frac{\pi}{3}$.

答：$\because \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta$，则

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}.$$

而 $\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$

$$= 6(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 9(\vec{b} \cdot \vec{a}) - 3(\vec{b} \cdot \vec{b})$$
$$= 6|\vec{a}|^2 + 7(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3|\vec{b}|^2$$
$$= 6|\vec{a}|^2 + 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\beta - 3|\vec{b}|^2$$
$$= 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 3 \cdot 1^2$$
$$= 24 + 7 - 3$$
$$= 28.$$

又由上一问 $|\vec{A}|=\sqrt{37}$，同法求得 $|\vec{B}|=\sqrt{31}$，

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{28}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{31}}\approx 0.8,$$

$$故 \quad \theta=\arccos\frac{28}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{31}}\approx\arccos\ 0.8\approx 35^\circ.$$

问：若有向量 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，

$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$，

如何求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度和方向余弦？

答： $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})+(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$$+(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$=(a_1+b_1+c_1)\vec{i}+(a_2+b_2+c_2)\vec{j}+(a_3+b_3+c_3)\vec{k},$$

$$\therefore \quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+(a_3+b_3+c_3)^2}.$$

$$且 \quad \cos\alpha=\frac{a_1+b_1+c_1}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+(a_3+b_3+c_3)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_2+b_2+c_2}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+(a_3+b_3+c_3)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3+b_3+c_3}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)^2+(a_2+b_2+c_2)^2+(a_3+b_3+c_3)^2}}.$$

问：什么是向量的向量积？学习向量的向量积时应注意什么问题？

答： 向量的向量积的定义是：

设向量 $\vec{c}$ 是由两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 按下列方式定出：

$\vec{c}$ 的模 $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$，其中 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 间的夹角；$\vec{c}$ 的方向垂直于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所决定的平面（即 $\vec{c}$ 既垂直于 $\vec{a}$，又垂直于 $\vec{b}$），$\vec{c}$ 的指向按右手规则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 来确定（如图1—19）。

那么向量 $\vec{c}$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积（或称叉积，外积），记作 $\vec{a}\times\vec{b}$，即 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$。

学习向量积时应注意下面几个问题：

（1）向量的向量积与数量积不同，向量积是一个向量，而不是一个数量。

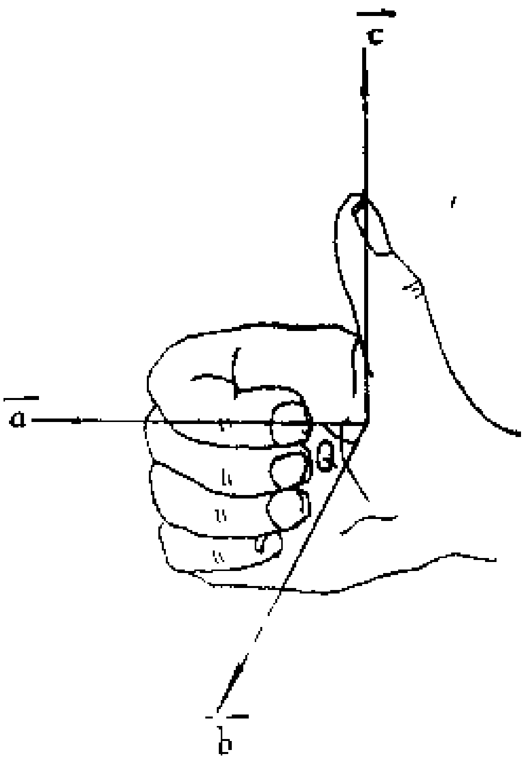


图 1—19

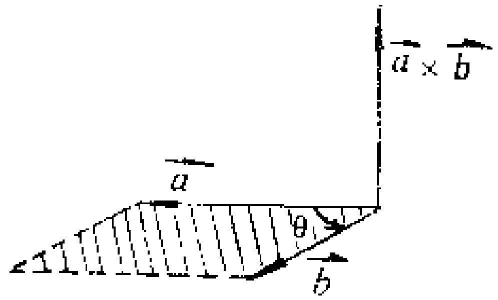


图 1—20

（2）向量积的模数$|\vec{a}\times\vec{b}|$等于以$\vec{a}$和$\vec{b}$为两邻边的平行四边形的面积，即

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$$（如图1—20）.

（3）向量积不满足乘法交换律，即$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$。由向量积的定义可知：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，即

$\vec{b}\times\vec{a}$的模数与$\vec{a}\times\vec{b}$的模数相等，但方向相反（如图1—21）.

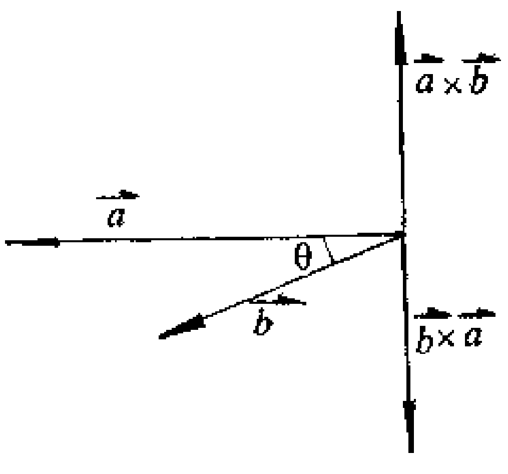


图 1—21

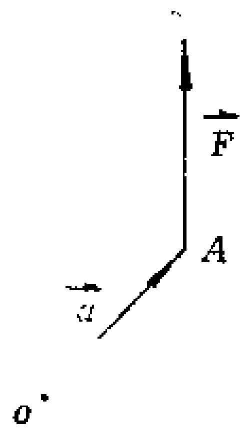


图 1—22

（4）向量积满足乘法分配律，即

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c}),$$

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{c}\times\vec{a}).$$

（5）在物理学中，力$\vec{F}$关于O点的力矩$\vec{M}$可以用向量积表示，即

$$\vec{M}=\vec{a}\times\vec{F}.$$

其中，$\vec{a}$为力$\vec{F}$的作用点$\vec{A}$的位置向量（如图1—22）

问：如何求向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$与向量$\vec{b}=2\vec{i}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$？

答：首先在空间直角坐标系中，确定$\vec{a}$与$\vec{b}$的位置（如图1—23）。

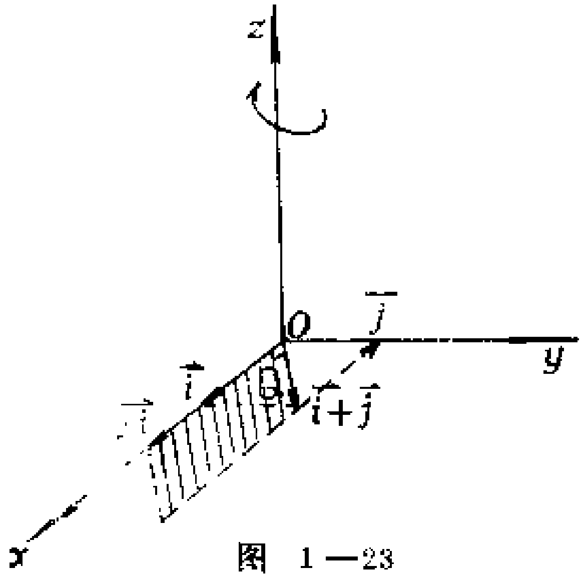


图 1—23

根据向量积定义，有

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta=2.$$

但$|\vec{b}|=|2i|=2$，$|\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，

因$2i$的方向与x轴一致，$\vec{i}+\vec{j}$的方向在$\angle xoy$的平分线上，

所以，$2\vec{i}$与$\vec{i}+\vec{j}$的夹角$\theta=\frac{\pi}{4}$（如图1—23）。

因此，$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.$

$\vec{a}\times\vec{b}$的方向与z轴的方向相反。

故$\vec{a}\times\vec{b}=(\vec{i}+\vec{j})\times2\vec{i}=-2\vec{k}$.

问：已知两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$，当$\vec{a}\times\vec{b}=o$时，$\vec{a}$与$\vec{b}$平行吗？

答：∵ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta=0$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，

已知 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 均为非零向量，

因此，必有$\sin\theta=0$，于是$\theta=0$或$\theta=\pi$。

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 必平行（包括重合）。

同理可证，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行（或重合），则有 $\vec{a}\times\vec{b}=\mathbf{o}$。

综上可知，两个非零向量平行的充分必要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\mathbf{o}$

问：在空间直角坐标系中，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 分别为x轴、y轴、z轴上的单位向量，如何求：

(1) $\vec{i}\times\vec{j}$；(2) $\vec{j}\times\vec{i}$；(3) $\vec{i}\times\vec{i}$；(4) $\vec{k}\times\vec{j}$？

答：可根据向量积的定义求。

（1）先求 $\vec{i}\times\vec{j}$ 的模数。

$|\vec{i}\times\vec{j}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\sin\theta$

∵ $|\vec{i}|=1$，$|\vec{i}|=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$，

∴ $|\vec{i}\times\vec{j}|=1$。

再确定 $\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向。

依右手规则知，$\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向与z轴方向一致，

∴ $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，（如图 1—24）。

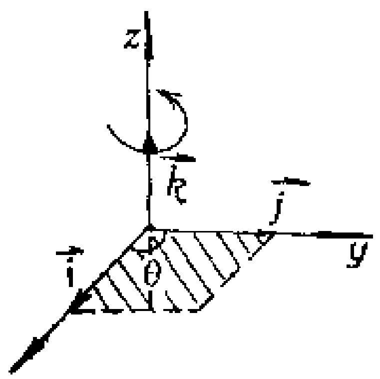


图 1—24

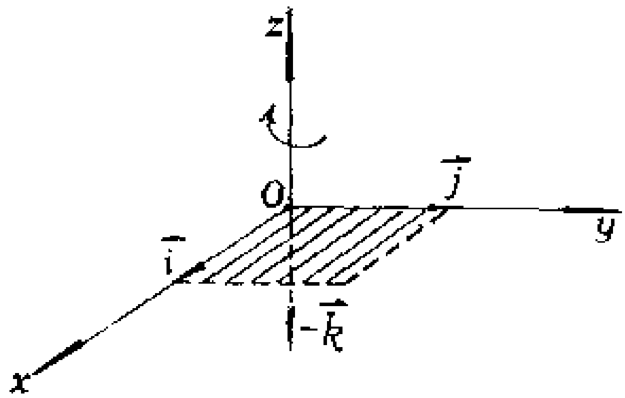


图 1—25

（2）$\vec{j}\times\vec{i}$ 与 $\vec{i}\times\vec{j}$ 模数相等，但方向相反，

∴ $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$（如图 1—25）。

（3）∵　$|\vec{i}\times\vec{i}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\sin 0=0$，

∴　$\vec{i}\times\vec{i}$是个零向量。

（4）先求$\vec{k}\times\vec{j}$的模数，

$$|\vec{k}\times\vec{j}|=|\vec{k}|\cdot|\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

再确定$\vec{k}\times\vec{j}$的方向。

依右手规则知，$\vec{k}\times\vec{j}$的方向与x轴负方向一致，

∴　$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$（如图1—26）。

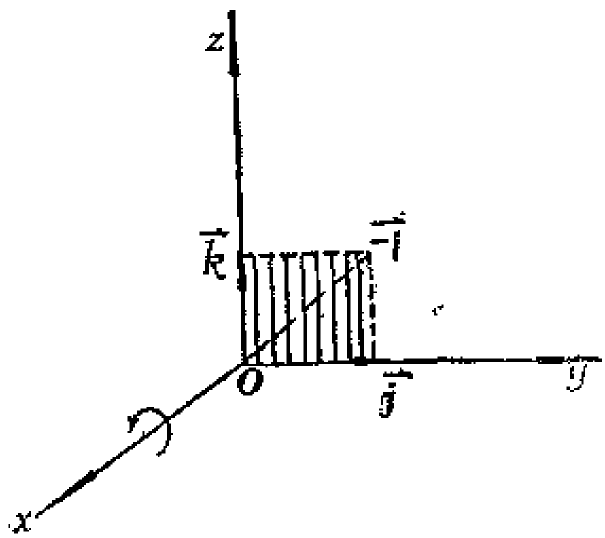


图 1—26

问：如何用投影式表示向量积？

答：在空间直角坐标系中，有向量

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$
$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k},$$

则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\&=a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}\\&+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}\\&+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}\end{aligned}$$

∵　$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$，$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$，

$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$，$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$，$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{j}$。

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\mathbf{o}$，

∴　$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

这就是用三阶行列式表示的两个向量的向量积的投影式。在计算时，只要将两个向量的投影分别代入行列式并进行计算即可。

问：若$\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$，$\vec{b} = 2\vec{i} - 8\vec{k}$，如何求$\vec{a} \times \vec{b}$?

答： $\because$ $a_1 = 1$，$a_2 = -3$，$a_3 = 2$，$b_1 = 2$，$b_2 = 0$，$b_3 = -8$，

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}.$$

在计算时，特别注意不要把行列式中的元素顺序写错，例如，把$\vec{a} \times \vec{b}$写成

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

就错了．另外，计算时不要丢掉各投影量的符号，若遇缺项则补零。

问：如何用向量的投影表示两个非零向量$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$，$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$相互平行的充分必要条件?

答： 我们知道，非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行的充分必要条件是$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{o}$

即

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$
$$= \mathbf{o}$$

则 $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$，$a_3b_1 - a_1b_3 = 0$，$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

即 $a_2b_3 = a_3b_2$，$a_3b_1 = a_1b_3$，$a_1b_2 = a_2b_1$.

于是 $\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，$\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.

$\therefore \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

即$\vec{a}$与$\vec{b}$平行。

反之， 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$，则有$\vec{a}\times\vec{b}=\boldsymbol{o}$

$\therefore$ 非零向量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$与$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$相互平行的充分必要条件为

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

即两个非零向量相互平行的充分必要条件是这两个向量的投影对应成比例。

例如，向量$\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ 与 $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$平行，这是因为

$$\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}.$$

问：下面的写法对吗？为什么？

$$\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta.$$

答：不对。因为$\vec{a}\times\vec{b}$是向量，而$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$是数量，是$\vec{a}\times\vec{b}$的模数。正确写法为：

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

问：若$|\vec{a}|\neq 0$，且$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$，则必有$\vec{b}=\vec{c}$吗？

答：不一定。我们知道，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}\Longleftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}=\boldsymbol{o}\Longleftrightarrow\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\boldsymbol{o}.$$

由于$\vec{b}-\vec{c}$不一定是零向量，所以不一定有$\vec{b}=\vec{c}$。

四、平面方程

问：如何理解曲面和曲面方程？

答：在空间解析几何中所讨论的曲面，都看做是具有某种性质的空间点的集合，这种性质是曲面上一切点所共同具有的。我

们用x、y、z之间的一个方程来表达曲面上点(x, y, z)所具有的共同性质（或规律），这个方程就称为这个曲面的方程。显然，凡是曲面上的点的坐标x、y、z都应满足这个方程，不在曲面上的点的坐标必不满足这个方程。

例如，球面方程$x^2+y^2+z^2=4$表示了球面上所有点具有的共同性质，即球面上的点与坐标原点的距离为2。因此，空间任意一点M，其坐标(a, b, c)若使方程成立，即

$$a^2+b^2+c^2=4,$$

则点M必在球面上；否则，点M必不在球面上。

问：平面方程的特点是什么？平面方程一般有几种形式？

答：在空间直角坐标系中，任何关于x, y, z的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

（其中A, B, C为不全为零的常数），都是平面方程。

反之，任何平面方程都是关于x, y, z的一次方法。

例如，$x-y+2z-1=0$，$x+2=0$都是平面方程。

平面方程一般有四种形式，即点法式，三点式，截距式与一般式，其中，方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \text{（}A, B, C\text{不全为零）},$$

就是平面方程的一般式。

问：什么是平面的法向量？

答：如果非零向量$\vec{n}$垂直于平面π，则称向量$\vec{n}$为平面的一个法向量（如图1—27）。显然，一个平面π有无限多个法向量，这些法向量相互平行，且平面π上任何一条直线M_0M都与法向量$\vec{n}$垂直。

问：在空间直角坐标系中，如果仅知道平面π的一个法向量$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$（或用坐标表示为$\vec{n}=\{A, B, C\}$），能确定平面$\pi$的位置吗？

答：不能。因为凡与平面π平行的平面都可以$\vec{n}$为法向量，所以，仅有法向量$\vec{n}$不能确定平面π的位置。但若在知道法向量$\vec{n}$的同时，还知道平面π上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，则可以从一组相

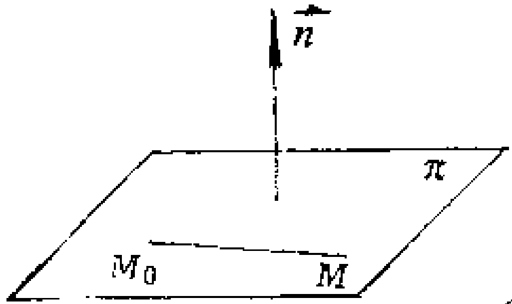


图 1—27

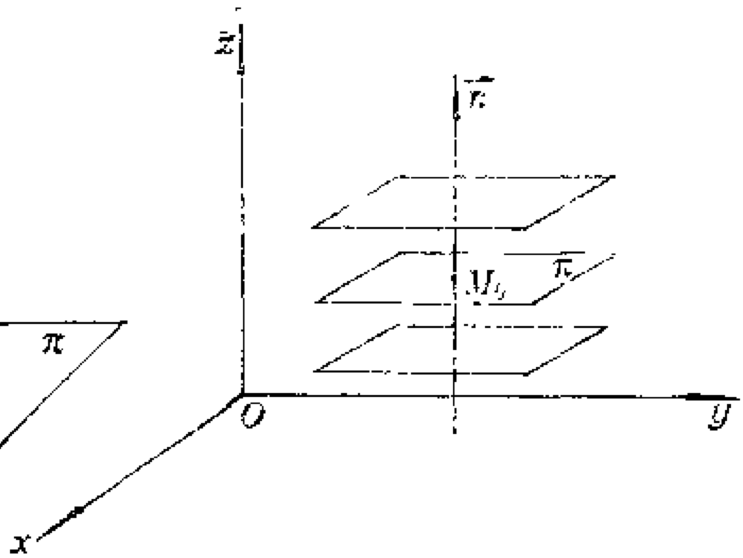


图 1—28

互平行的平面中唯一地确定平面π（图 1—28）．

因此，我们可以用平面π的法向量$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$与平面上的一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$所建立的方程，来表示平面π，并称这样的平面方程为点法式方程．

问：若已知平面π上的点$M_0(x_0, y_0, z_0)$和法向量$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$，如何求平面π的点法式方程？

答：（1）设点$M(x, y, z)$为平面π上的任意一点(如图1—29)，则有平面π上的向量$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$．

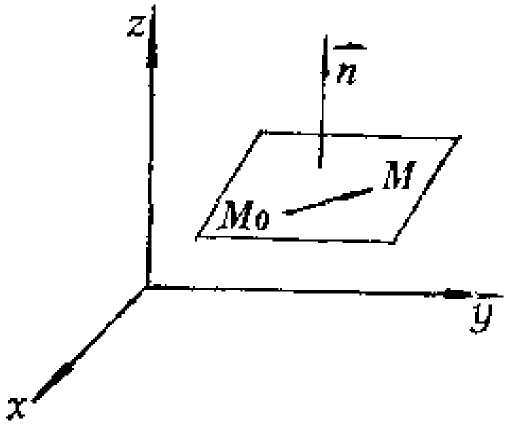


图 1—29

∵ $\overrightarrow{M_0M}$在平面π上，

∴ $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$．

∴ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，即

$(A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k})\cdot[(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}]=0$

$\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+c(z-z_0)=0$．

这就是平面π的点法式方程，这样，如果知道平面π的法向

量$\vec{n}=\{A, B, C\}$和平面上的一个已知点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，就可以依上式写出平面的点法式方程.

显然，平面π上的任意一点$M(x, y, z)$必满足这个方程，不是平面π上的点必不满足这个方程.

例如，过点$M_0(1, 1, 2)$，且以$\vec{n}=\{1,2,1\}$为法向量的平面方程为

$$1\cdot(x-1)+2(y-1)+1\cdot(z-2)=0,$$

即 $x+2y+z-5=0$.

（2）平面π的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad Ax+By+Cz+D=0 \text{（其中}D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)\text{）}.$$

从这里我们看到，平面π的法向量$\vec{n}$的投影，恰好是平面方程一般式中x, y, z的系数.所以，如果已知平面π的一般式方程，我们立即就可以写出这个平面的法向量.

例如，平面$-x+2y-z+1=0$的法向量为：$\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，或用坐标表示为$\vec{n}=\{-1, 2, -1\}$.

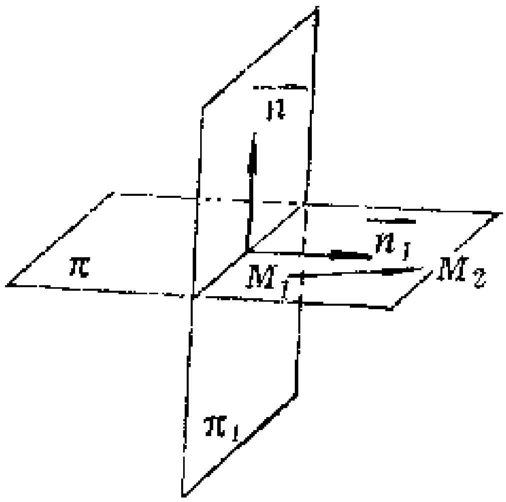


图 1—30

问：若平面π通过两点$M_1(8, -3, 1)$和$M_2(4, 7, 2)$，且垂直于平面π_1：$3x+5y-7z+21=0$（图1—30），如何求平面π的方程？

答： ∵ 平面π_1的方程为：

$$3x+5y-7z+21=0,$$

则平面π_1的法向量$\vec{n}_1=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k}$.

∵　平面π过点$M_1(8,-3,1)$和$M_2(4,7,2)$，

∴　向量$\overrightarrow{M_1M_2}=-4\vec{i}+10\vec{j}+\vec{k}$在平面$\pi$上。

设平面π的法向量为$\vec{n}$，则$\vec{n}\perp\vec{n}_1$。

∵$\vec{n}_1$与平面π平行（由于$\vec{n}_1$的始点为任意的，故也可以认为$\vec{n}_1$在平面π上），

∴　$\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1$是平面$\pi$的一个法向量。即

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n}_1$$

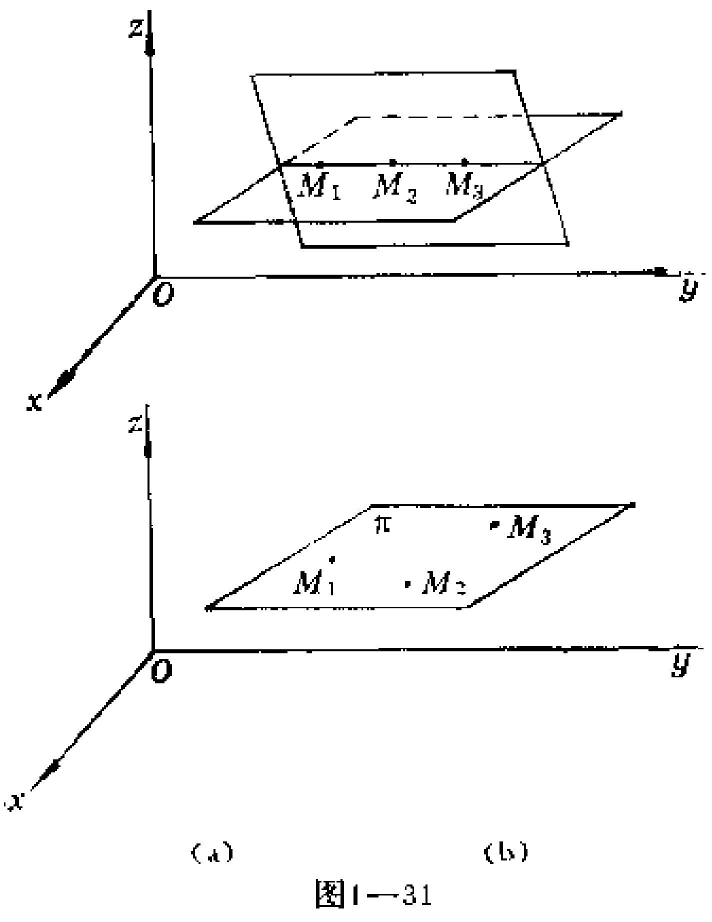
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 10 & 1\\ 3 & 5 & -7\end{vmatrix}=-75\vec{i}-25\vec{j}-50\vec{k}.$$

∵　平面π过点$M_1(8,-3,1)$，

∴　依平面方程的点法式可知，平面π的方程为：

$$-75(x-8)-25(y+3)-50(z-1)=0,$$

即　$3x+y+2z-23=0$。



(a)　　　　　　(b)

图1—31

问：在空间直角坐标系中，若已知平面π上的任意三点M_1，M_2，M_3，则能唯一确定一平面π的位置吗？

答： 不能。当点M_1、M_2、M_3在同一条直线上时（图1—31(a)），就不能唯一确定平面π的位置；当点M_1、M_2、M_3不在同一条直线上时（图1—31(b)），就可以唯一确定平面π的位置。

问：若$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$、$M_3(x_3, y_3, z_3)$为平面π上不在同一条直线上的三个点，如何求出平面π的方程？

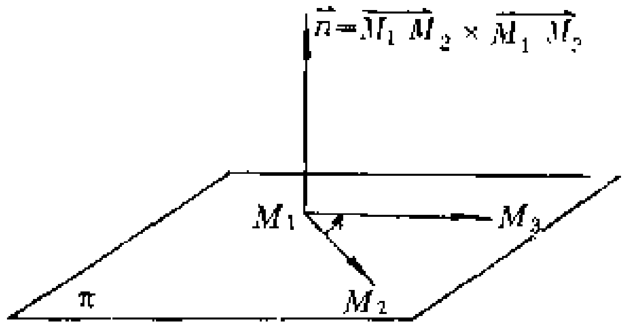


图 1—32

答： 由于点M_1、M_2、M_3在平面π上，则向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_1M_3}$必在平面π上，且$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$为平面$\pi$的一个法向量（如图1—32）。

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$$

又 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$，

$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$，

则
$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_2-x_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}\vec{k}.$$

$\because$ M_1为平面π上的一点，根据平面方程的点法式，有

$$\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(x-x_1)-\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}(y-y_1)+$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}(z-z_1)=0,$$

即 $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

这就是平面方程的三点式。今后若知道平面上的不在同一条直线上的任意三点，只要将其坐标分别代入上式，就可以得到平面的方程。

例如，过点 $M_1(0, 1, -1)$、$M_2(1, -1, 0)$、$M_3(1,0,-1)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z+1 \\ 1-0 & -1-1 & 0-(-1) \\ 1-0 & 0-1 & -1-(-1) \end{vmatrix}=0,$$

即 $$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

问：若平面π过点$M_1(a, 0, 0)$、$M_2(0, b, 0)$、$M_3(0, 0, c)$，其中$a\neq0, b\neq0, c\neq0$，则由这三点能唯一确定平面π的位置吗？若能确定，写出这个平面的方程？这个方程有什么特点？

答：因为$a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$，则点M_1、M_2、M_3不在同一条直线上，所以，这三个点可以唯一确定平面π的位置。我们可以利用三点式写出平面π的方程，即

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0,$$

整理，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

从M_1、M_2、M_3各点的坐标可知，这三个点分别在x轴、y轴、z轴上（图1—33），我们称a、b、c这三个数为平面π在x轴、y轴、z轴上的截距，并把这平面的方程称为平面π的截距式方程。

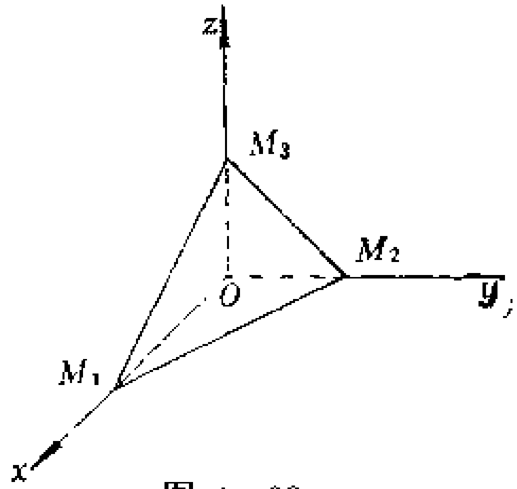


图 1—33

问：怎样把平面$3x-4y+z-5=0$写成截距式方程？

答：在方程$3x-4y+z-5=0$中，

令 $y=0$，$z=0$，解得：$x=\dfrac{5}{3}$；

令 $x=0$，$y=0$，解得：$z=5$；

令 $x=0$，$z=0$，解得：$y=-\dfrac{5}{4}$。

则平面在x轴、y轴和z轴上的截距分别为$a=\dfrac{5}{3}$，$b=-\dfrac{5}{4}$，$c=5$。

∴ 平面的截距式方程为

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

问：如何确定平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）在第一卦限的部分平面在$xoy$平面上的投影？

答：从平面的截距式方程可知，平面与x轴、y轴和z轴的交点分别为

$M_1(a, 0, 0)$、$M_2(0, b, 0)$，$M_3(0, 0, c)$。

连结M_1M_2、M_2M_3和M_3M_1，则三角形$M_1M_2M_3$就是平面

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 在第一卦限的部分平面（如图 1—34）。而曲线段OM_1、M_1M_2、OM_2组成的三角形M_1OM_2就是这个平面在xoy坐标面上的投影（如图 1—34的斜线部分）。

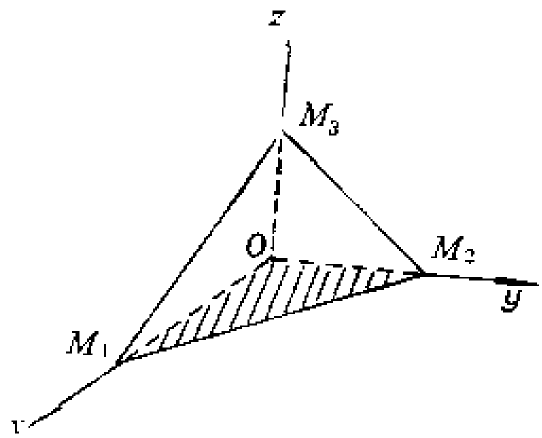


图 1—34

问：如何将平面的一般式方程$3x+6y+9z+1=0$转化为点法式方程？

答： 从方程$3x+6y+9z+1=0$可知，平面的法向量为

$$\vec{n}=\{3,6,9\}.$$

在平面的一般式方程中，若令$x=0$，$y=0$，

可解得：$z=-\frac{1}{9}$.

则点$M_0(0,0,-\frac{1}{9})$ 在平面上。

∴ 平面的点法式方程为

$$3(x-0)+6(y-0)+9\left[z-\left(-\frac{1}{9}\right)\right]=0.$$

问：如何根据平面的一般式方程$Ax+By+Cz+D=0$讨论平面的位置？

答： 我们可分别令A, B, C, D各数为零，然后研究平面的各种特殊位置。

（1）令$D=0$，则平面的一般式方程变为：

$$Ax+By+Cz=0 \quad ①$$

这时，由于原点O（0，0，0）满足方程，所以，原点O在平面上，因此，方程①表示的平面必过原点。例如，方程$x-y-z=0$就表示一个经过原点的平面。

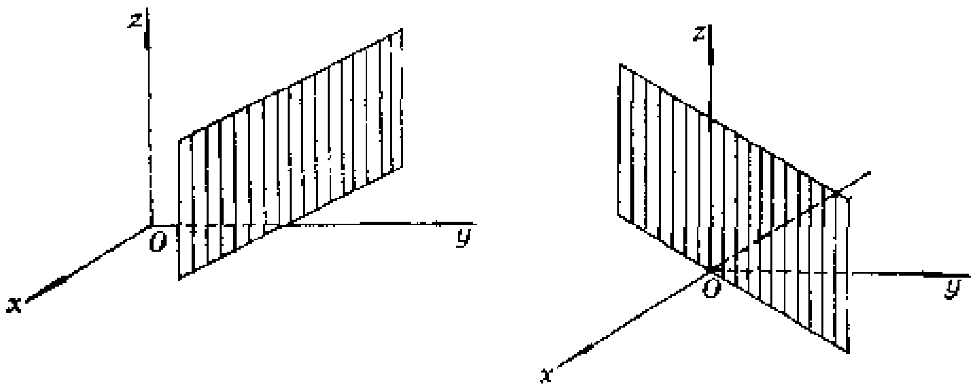
（2）令$C=0$，则平面的一般式方程变为：

$$Ax+By+D=0 \quad ②$$

这时，由于$C=0$，所以，平面法向量$\overrightarrow{n}$在z轴上的投影为零，这个向量必垂直于z轴。

因此，方程②表示的平面必平行于z轴（$D\neq0$）（如图1-35(a)）。

当$D=0$时，方程②所表示的平面通过z轴（图1—35(b)）。



(a) (b)

图 1—35

（3）令$B=0$，则平面的一般式方程变为：

$$Ax+Cz+D=0 \quad ③$$

当$D\neq0$时，方程③所表示的平面平行于y轴（图1—36(a)）。

当$D=0$时，方程③所表示的平面经过y轴（如图1—36(b)）。

（4）令$A=0$，则平面的一般式方程变为：

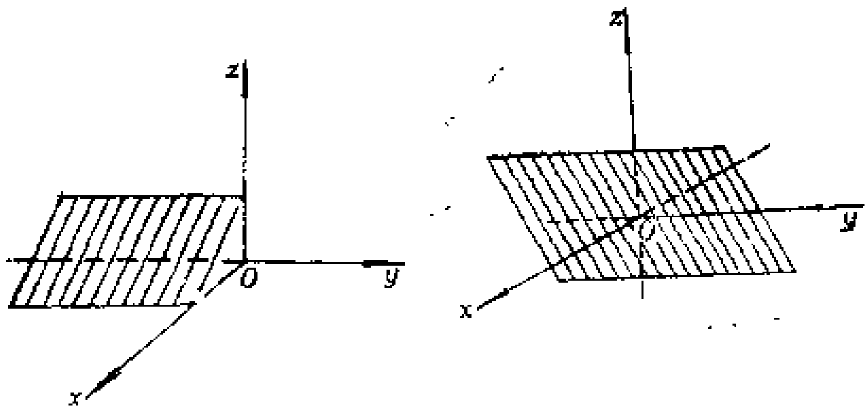
$$By+Cz+D=0 \quad ④$$

当$D\neq0$时，方程④所表示的平面平行于x轴（如图1—37(a)）。

当$D=0$时，方程④所表示的平面经过x轴（如图1—37(b)）。

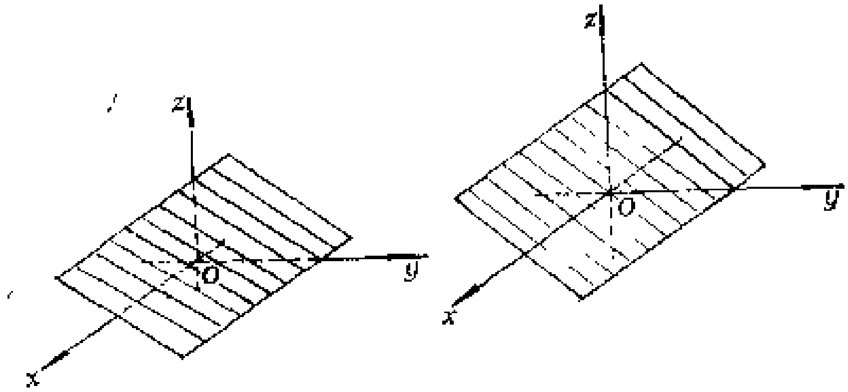
综上所述，在平面的一般式方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$



(b)　　　　(a)

图 1—36



(a)　　　　(b)

图 1—37

中，若缺x项，则平面与x轴平行；若缺y项，则平面与y轴平行；若缺z项，则平面与z轴平行。

（5）令$A=0$，$B=0$，则平面的一般式方程变为

$$Cz+D=0 \quad (C\neq 0) \tag{⑤}$$

这时，方程⑤表示一个平行于xoy坐标面的平面。

这是因为$A=0$，$B=0$，则平面的法向量在x轴、y轴的投影均为零，这时，这个法向量必同时垂直于x轴和y轴。因此，平面必平行于x轴和y轴，即平面平行于xoy坐标面(图1—38)。

当$D=0$时，方程⑤所表示的平面与xoy坐标面重合。

（6）同理可知，当$B=0$，$C=0$时，平面方程

$$Ax+D=0 \quad (A\neq 0)$$

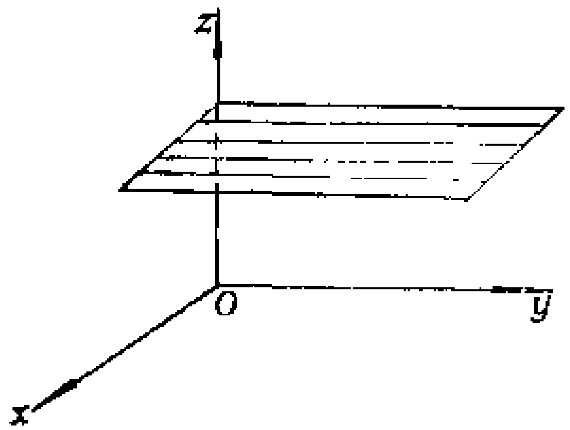


图 1—38

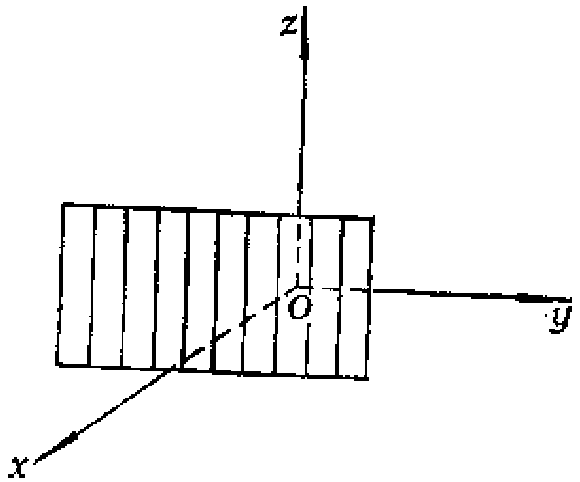


图 1—39

表示平行于yoz坐标面的平面（如图 1—39）.

当$D=0$时，平面$Ax=0$与yoz坐标面重合.

当$A=0$，$C=0$时，方程

$$By+D=0\ (B\neq0)$$

表示平行于xoz坐标面的平面（如图 1—40）

当$D=0$时，平面$By=0$与xoz坐标面重合.

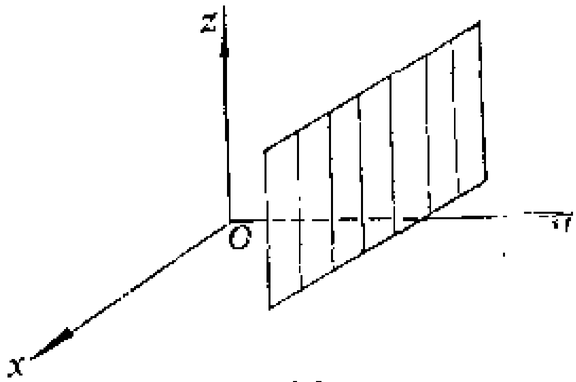


图 1—40

问：如何求通过x轴和点M_0（4，－3，－1）的平面π的方程？

答： 我们可以用两种方法求出平面π的方程.

（1）首先求平面π的一般式方程.

∵ 平面π经过x轴，则设平面π的方程为

$$By+Cz=0 \qquad ①$$

已知点M_0（4，－3，－1）在平面π上，则将$y=-3$，$z=-1$代入方程①，得

$$-3B-C=0，即$$
$$C=-3B。$$

将$C=-3B$代入方程①，得

$$By-3Bz=0。$$

即
$$y-3z=0。$$

这就是平面π的一般式方程。

（2）求平面π的点法式方程。

∵ 平面π经过x轴，则向量$\vec{i}$在平面π上。

又点M_0（4，－3，－1）和原点O（0，0，0）在平面π上，则向量$\overrightarrow{OM_0}$在平面π上，所以平面π的一个法向量为：

$$\vec{n}=\vec{i}\times\overrightarrow{OM_0}$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 4 & -3 & -1\end{vmatrix}$$
$$=\vec{j}-3\vec{k}。$$

故平面π的点法式方程为：

$$0(x-4)+1\cdot(y+3)-3(z+1)=0，$$

即
$$y-3z=0。$$

问：下列各平面的位置如何？并画图。

（1）$2x-3y+4=0$；　　　　（2）$3x-2=0$；

（3）$4y-7z=0$。

答：（1）在方程$2x-3y+4=0$中，由于缺少z项，且$D=4$，故方程表示的平面平行于z轴（如图1—41）

（2）在方程$3x-2=0$中，由于缺少y、z项，且$D=-2$，所以，方程表示的平面平行于yoz坐标面（如图1—42）。

（3）在方程$4y-7z=0$中，由于缺少x项，且$D=0$，所以，平面通过坐标原点O（0，0，0）且经过x轴（如图1—43）。

问：在空间直角坐标系中，三个坐标平面的方程各是什么？

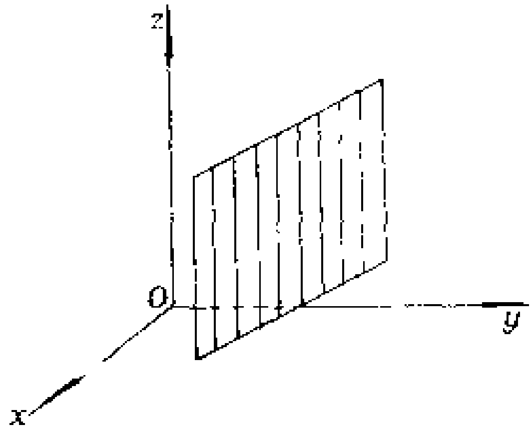


图 1—41

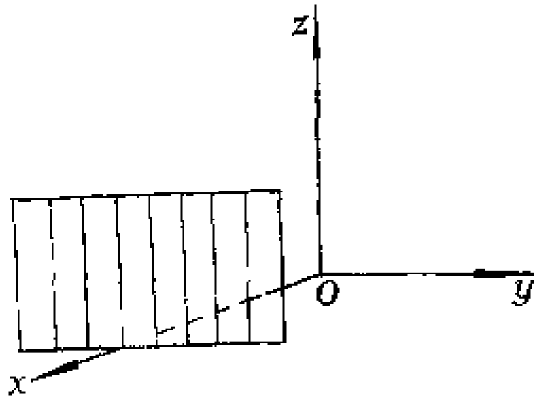


图 1—42

答：先求xoy平面的方程。由于点$M(x, y, z)$在xoy平面上的充要条件是它的竖坐标等于零，即

$$z=0,$$

所以这就是xoy坐标平面的方程。

同理可得，yoz坐标平面的方程为：$x=0$；

zox坐标平面的方程为：$y=0$。

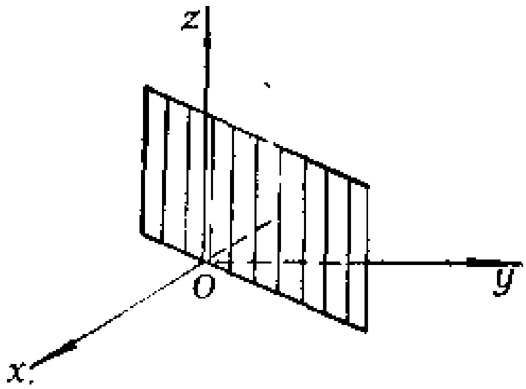


图 1—43

五、直线方程

问：为什么说空间直线可以用两个一次方程联立起来表示？

答：空间直线可以看成是两个平面的交线（如图1—44），直线上的点M（x, y, z）应同时符合这两个平面方程，所以，一般将表示平面的两个一次方程联立来表示直线。

如果平面π_1的方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

平面π_2的方程为

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

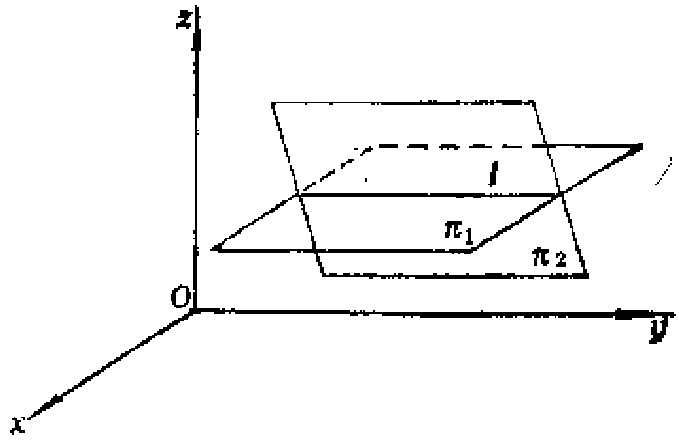


图 1—44

则这两个平面的交线 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

其中，A_1、B_1、C_1不全为零，A_2、B_2、C_2也不全为零。且作为平面π_1与π_2的交线，A_1、B_1、C_1与A_2、B_2、C_2应不成比例。我们把直线的这种方程称为直线的一般方程（或叫交面式方程）。

例如，空间直角坐标系中，xoy 坐标面与yoz坐标面的交线为y轴，其方程为

$$\begin{cases} x=0, \\ z=0. \end{cases}$$

又如，平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）

与xoy坐标面的交线为

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

如图 1—45中的ab。

问：若已知一非零向量$\vec{a}=\{l, m, n\}$和定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，如何求经过点M_0且与$\vec{a}$平行的直线方程？

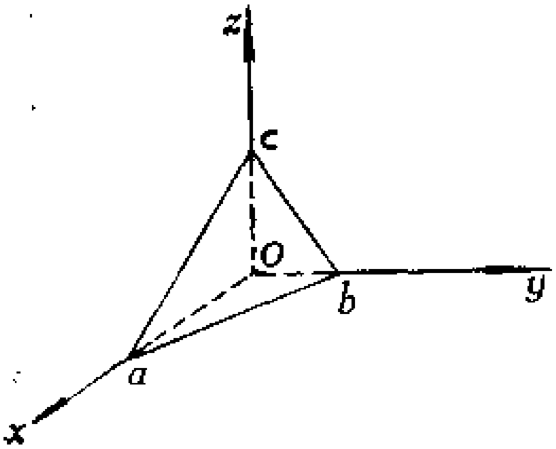


图 1—45

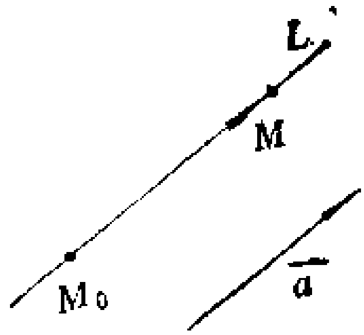


图 1—46

答：设点$M(x, y, z)$为直线上的一个动点，则有向量$\overrightarrow{M_0M}$，且$\overrightarrow{M_0M}$的投影式为

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k},$$

即 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$，

已知$\overrightarrow{M_0M}$与$\vec{a}$平行（如图 1—46），

所以，$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

我们称这种形式的直线方程为直线的标准方程（或称直线的点向式方程）。并称向量$\vec{a}$为直线L的方向向量，$\vec{a}$的三个分量l，m，n称为直线L的方向数。显然，与$\boldsymbol{a}$平行的任意向量均可做为直线L的方向向量。因此，直线L的方向数有无穷多组，但它们之间应对应成比例。

问：一直线L过点$M_0(0, 0, 1)$，且平行于向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，如何求直线L的标准方程？

答：因为直线L与向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$平行，

所以直线L的方向数为：$l=1$，$m=1$，$n=0$。

故直线L的标准方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{0},$$

即 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}$.

问：在分式中，通常规定分式的分母不能为零，否则分式无意义．在上问中，分式$\frac{z-1}{0}$的分母为什么出现零？是否可以认为上问求得的直线方程无意义？

答：在直线的标准方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

中，l, m, n为直线的三个方向数。如果l, m, n中出现零（不能同时为零）．例如，$l=0, m=0$，则直线方程为

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{n}\ (n\neq 0).$$

这时，$\frac{x-x_0}{0}$与$\frac{y-y_0}{0}$并不是通常意义上的分式，而应理解为一种比例关系。我们规定，此时$\frac{x-x_0}{0}$与$\frac{y-y_0}{0}$分别表示

$$x-x_0=0 \quad 与 \quad y-y_0=0$$

例如，在上问直线方程中的$\frac{z-1}{0}$，就表示

$$z-1=0.$$

问．平面π_1的方程为$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，平面π_2的方程为$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则直线L的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

此时，直线L的方向向量$\vec{a}$与平面π_1、π_2的两个法向量$\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$有什么关系？

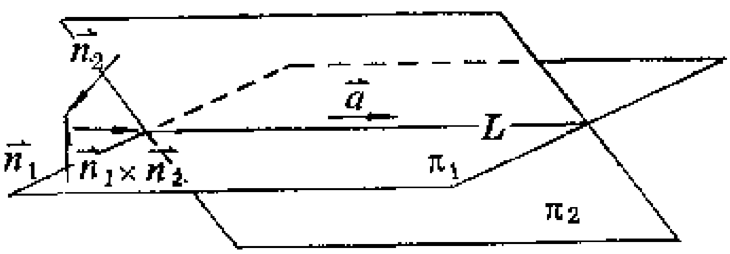


图 1—47

答：从图1—47可以看出，平面π_1与π_2的相交直线L的方向向量$\vec{a}$与平面π_1和π_2的两个法向量$\vec{n_1}$、$\vec{n}$的向量积$\vec{n_1}\times\vec{n_2}$平行。

所以，在求两个平面相交直线的标准方程时，就可以选这两个平面法向量的向量积为该直线的方向向量。

例如，直线L的一般方程为

$$\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0. \end{cases}$$

若求直线L的标准方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

则先需求出直线L上的一个定点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，然后再求出直线L的三个方向数l，m，n。

为求直线L的一个定点M_0，令$y=0$，则由

$$\begin{cases} x+z=-5, \\ 5x+4z=-36. \end{cases}$$

解得　$x=-16$，$z=11$。

则　$M_0(-16, 0, 11)$为直线L上的一个定点。

取直线L的方向向量为平面：$x-y+z+5=0$和平面$5x-8y+4z+36=0$的法向量的向量积，即

$$\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \end{vmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}.$$

所以，直线L的标准方程为：

$$\frac{x-(-16)}{4}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-11}{-3},$$

即　$$\frac{x+16}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-11}{-3}.$$

问：已知直线L的标准方程为：$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，如何写出直线$L$的参数方程？

答：因为直线L的标准方程为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c},$$

则可令其比值为t，即

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t,$$

则有 $$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{a}=t,\\[2ex]\dfrac{y-y_0}{b}=t,\\[2ex]\dfrac{z-z_0}{c}=t.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x=x_0+at,\\y=y_0+bt,\\z=z_0+ct.\end{cases}$$

这就是直线L的参数方程，其中t为参数。

问：一直线过点 M_0（1，0，−2），且垂直于平面$2x-y+3z=0$，如何求该直线的标准方程、参数方程和一般方程？

答：因为直线垂直于平面$2x-y+3z=0$，

所以，该平面的法向量即可作为直线的方向向量$\vec{a}$，即

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}.$$

已知直线过点M_0（1，0，−2），

则直线的标准方程为：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{3}.$$

直线的参数方程为：

$$\begin{cases}x=1+2t,\\y=-t,\\z=-2+3t\end{cases}$$

直线的一般式方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1},\\[2ex]\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{3}.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x+2y=1,\\3y+z=-2.\end{cases}$$

六、二次曲面

问：什么是二次曲面？常见的二次曲面有哪几种？

答： 在空间直角坐标系中，空间曲面可以用方程 $F(x,y,z)=0$ 来表示。若方程 $F(x,y,z)=0$ 中的 x，y，z 是一次（或某些项为零次）的，则所表示的曲面为平面，通常称平面为一次曲面。若方程 $F(x,y,z)=0$ 中的 x，y，z 是二次（或某些项为一次、零次）的，则所表示的曲面称为二次曲面。

常见的二次曲面可分为下面六种：

（1）球面，包括圆球面和椭球面。

（2）双曲面，包括单叶双曲面和双叶双曲面。

（3）抛物面，包括椭圆抛物面和双曲抛物面。

（4）二次锥面。

（5）二次柱面。

（6）一些退化的情况，例如，方程 $x^2-y^2=0$ 表示一对相交平面等。

问：研究二次曲面的方法是什么？

答： 在空间直角坐标系中，通过方程用描点法来研究曲面的形状是很不方便的，通常用"平行截面法"。这就是用一组平行于坐标平面的平面去截割曲面，从所截得的截痕（曲线）的形状去想象曲面的形状，从而绘出曲面的图形。

问：球面的方程是怎样的？

答：球面包括圆球面和椭球面。

在空间直角坐标系中，球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的圆球面方程为：

$$\frac{(x-x_0)^2}{R^2}+\frac{(y-y_0)^2}{R^2}+\frac{(z-z_0)^2}{R^2}=1 \quad (R>0),$$

即 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$。

椭球面方程为：

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$。

特别地，当球心在坐标原点 $O(0,0,0)$ 时，圆球面方程为：

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1.$$

即 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

椭球面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

显然，圆球面是椭球面的特例，在椭球面方程中，若$a=b=c=R$，就变成了圆球面方程。

问：球面方程的特点是什么？

答：球面方程是关于x，y，z的二次方程，而且方程中缺少xy、yz和xz项。特别地，当方程中的平方项的系数相等时，为圆球面方程。

例如，方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z-4=0$是关于x，y，z的二次方程，方程中缺xy，yz和xz项，且平方项的系数相等（都是1），因此这个方程表示一个圆球面。通过配方，可将方程转化为圆球面的标准方程，即

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=5^2.$$

问：怎样由球面方程来研究球面的位置？

答：球心在原点的圆球面方程为

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1 \quad (R>0).$$

显然， $\frac{x^2}{R^2}\leqslant 1$， $\frac{y^2}{R^2}\leqslant 1$， $\frac{z^2}{R^2}\leqslant 1$，

即 $|x|\leqslant R$， $|y|\leqslant R$， $|z|\leqslant R$。

这表明，圆球面位于由平面 $x=\pm R$， $y=\pm R$， $z=\pm R$ 所构成的正方体内（如图1—48）。

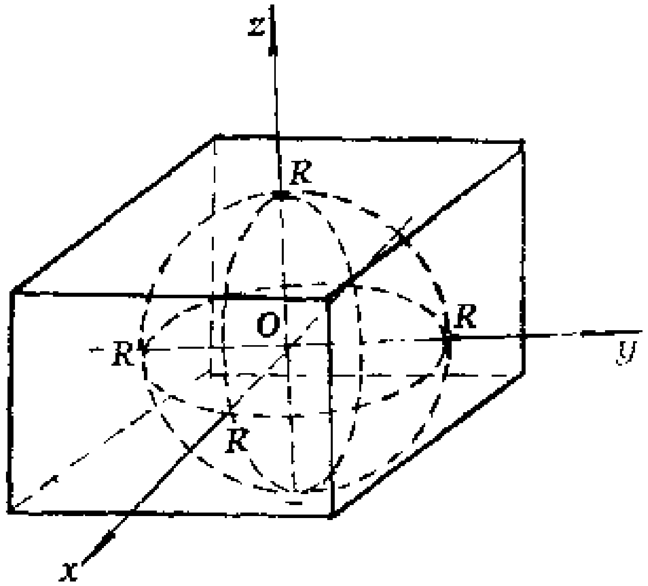


图 1—48

圆球面被三个坐标面所截的截痕各为一个圆，方程分别为：

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1. \end{cases}$$

球心在原点的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

显然， $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$， $\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$， $\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

即 $|x|\leqslant a$， $|y|\leqslant b$， $|z|\leqslant c$.

这表明，椭球面位于$x=\pm a$，$y=\pm b$和$z=\pm c$各平面所构成的长方体内（如图1—49）。

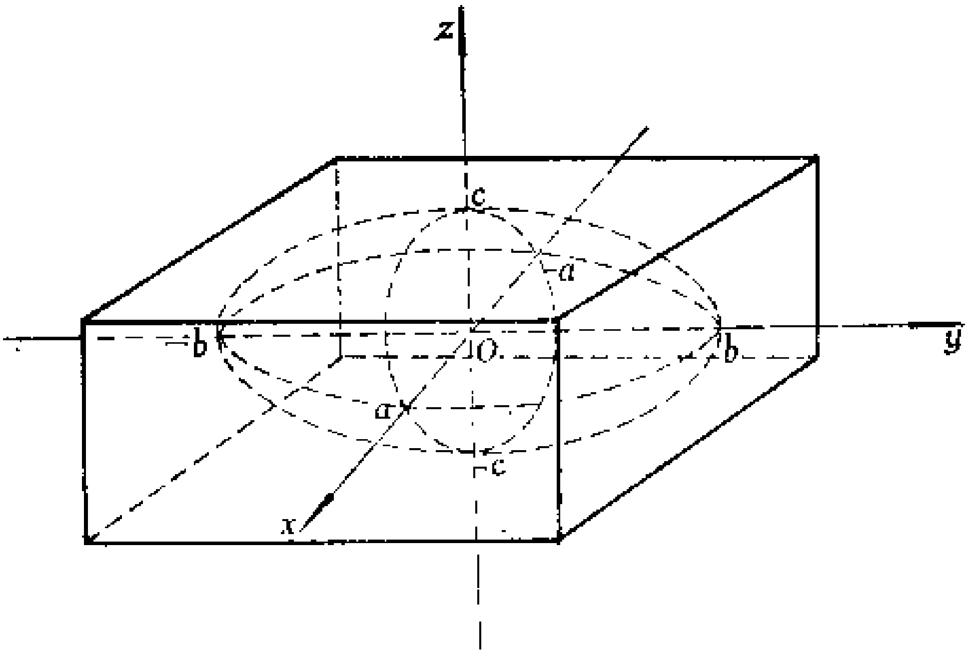


图 1—49

问：半球面的方程是怎样的？

答： 圆球面（球心在原点）被xoy坐标面分成上、下两部分（如图1—50）。

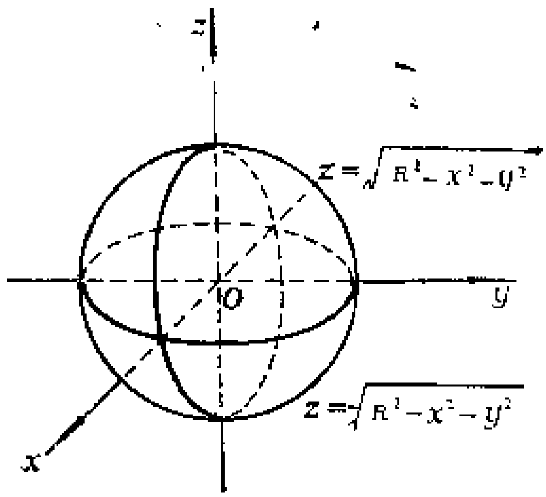


图 1—50

上半圆球面的方程为：

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2};$$

下半圆球面的方程为：

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

同样，椭球面（球心在原点）也被xoy坐标面分成上、下两部分，上半椭球面的方程为：

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

下半椭球面的方程为：

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

问：双曲面与双曲面的方程有什么特点？

答：双曲面包括单叶双曲面和双叶双曲面。

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,\ b>0,\ c>0),$$

所确定的曲面，称为以 z 轴为对称轴的单叶双曲面（如图1—51）。

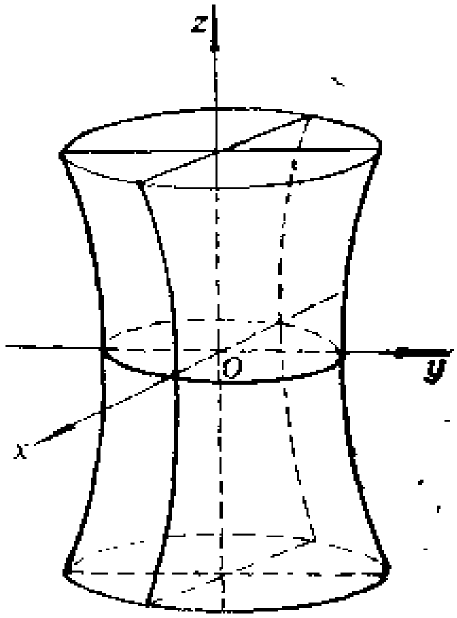


图 1—51

从图1-51可以看出，单叶双曲面只有一块曲面。

当用 xoz 坐标面和 yoz 坐标面来截割曲面时，截得的曲线均为双曲线，其方程为：

$$\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

由于曲面有上面这两个特点，故称之为单叶双曲面。

若用 xOy 坐标面去截割曲面，截得的曲线为椭圆，其方程为：

$$\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$$

很明显，单叶双曲面的方程有两个显著的特点：

方程的左端均含有 x，y，z 的二次项，且仅含有一个负号。

注意，负号在哪个变量的前面，单叶双曲面就以这个变量对应的坐标轴为对称轴。例如，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 和} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

都表示单叶双曲面，前者表示的单叶双曲面以 y 轴为对称轴，后者表示的单叶双曲面以 x 轴为对称轴。

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{或} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所确定的曲面称为关于 xoy 坐标面对称的双叶双曲面（如图1—52）。

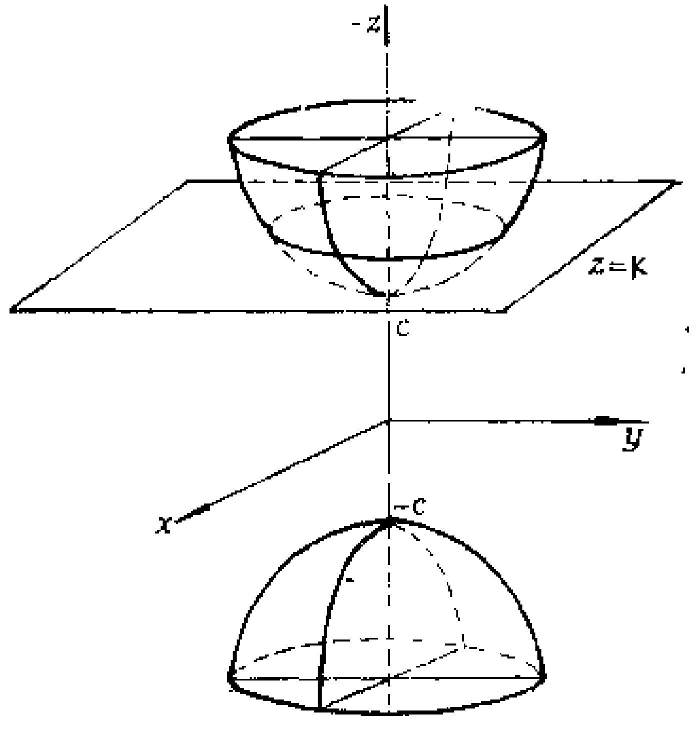


图 1—52

与单叶双曲面的方程相比较，可以看出，双叶双曲面的方程中含有两个负号，而且负号在哪两个变量前面，双叶双曲面的对称平面就是与这两个变量相对应的坐标轴组成的坐标平面，

例如，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 和 \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

都表示双叶双曲面，前者表示的双叶双曲面以 yoz 坐标面为对称平面，后者表示的双叶双曲面以 xoz 坐标面为对称平面。

我们重点研究以xoy 坐标面为对称平面的双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad 或 \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

从图1—52可以看出，双叶双曲面包括关于xoy坐标面对称的两部分，而且它被xoz坐标面和 yoz 坐标面所截，截痕都是双曲线，因此，这个曲面被称为双叶双曲面。

如果用平行于xoy 坐标面的平面$z=k$去截上述双叶双曲面（如图1—52），当$|k|\geqslant c$时，有截痕，且$|k|>c$时的截痕是椭圆，其方程为：

$$\begin{cases} z=k \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}-1(|k|>c). \end{cases}$$

当$|k|=c$时的截痕为一点。

当$|k|<c$时，无截痕。

应该注意：当$a=b=R$时，双叶双曲面变为双叶旋转双曲面，其方程为：

$$c^2(x^2+y^2)-R^2z^2=-R^2c^2.$$

问：抛物面和抛物面的方程有什么特点？

答：抛物面包括椭圆抛物面和双曲抛物面。

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \ (a>0, \ b>0),$$

所确定的曲面，称为以 z 轴为对称轴的椭圆抛物面（如图1—53）。

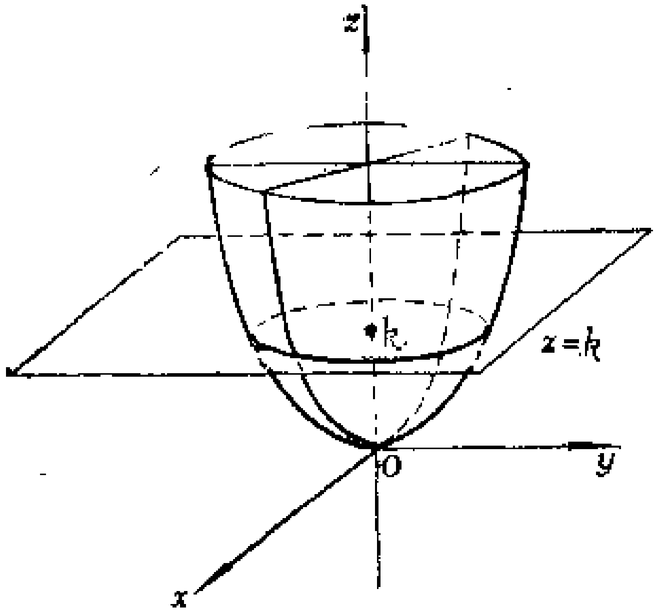


图 1—53

从图1—53可以看出，椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$在$xoy$坐标面的上方。曲面被$xoz$坐标面和$yoz$坐标面所截，截痕为两条抛物线，其方程为：

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}=z \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}=z. \end{cases}$$

若用与xoy坐标面平行的平面$z=k$去截椭圆抛物面，则当$k>0$时，截痕为一个椭圆，其方程为：

$$\begin{cases} z=k \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k \quad (k>0). \end{cases}$$

当$k=0$时，截痕为一点$O(0,0,0)$。

当$k<0$时，无截痕。

因此，上述曲面被称为椭圆抛物面。

从方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$可以看出，方程有两个明显的特点，即方程中无常数项，且变量z的次数为1。

一般地，凡具有上面这两个特点的方程都表示椭圆抛物

面。例如，方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=y \quad 和 \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=x$$

都表示椭圆抛物面，且前者以 y 轴为对称轴，后者以 x 轴为对称轴。

由方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

所确定的曲面称为双曲抛物面（如图1—54）。双曲抛物面很象一个马鞍子表面，所以，常把双曲抛物面称为马鞍面。

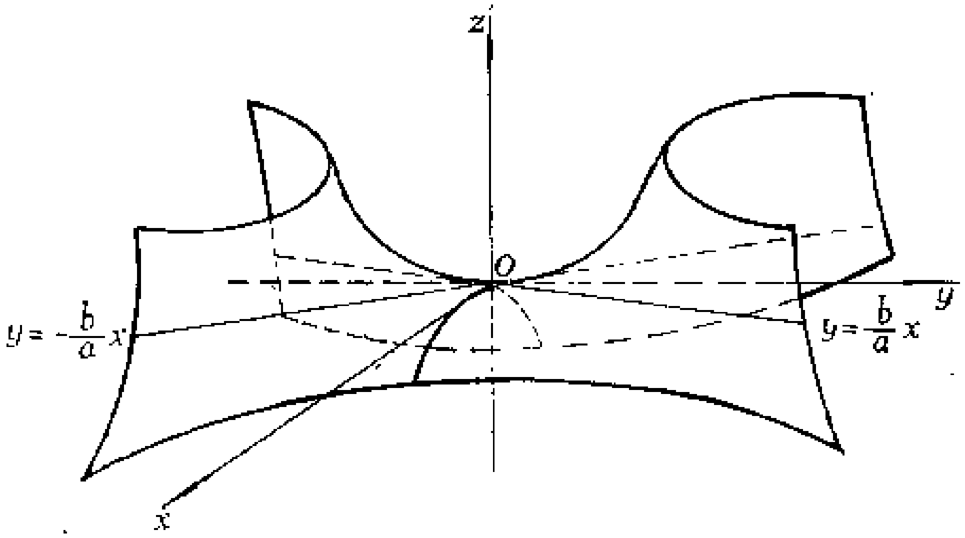


图 1—54

从图1—54可以看出，用 yoz 坐标面和 zox 坐标面去截这个曲面时，截痕是抛物线，其方程为：

$$\begin{cases} x=0 \\ z=\frac{y^2}{b^2} \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} y=0 \\ z=-\frac{x^2}{a^2}. \end{cases}$$

用 xoy 坐标面去截曲面时，得到两条直线，其方程为：

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} z=0 \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0. \end{cases}$$

若曲面被平行于 xoy 坐标面的平面 $z=k$（$k\neq0$）去截时，截

痕永远是双曲线，且当$k>0$时，双曲线在xoy坐标面的上方；当$k<0$时，双曲线在xoy坐标面的下方，其方程为：

$$\begin{cases} z = k \\ -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k \quad (k \neq 0). \end{cases}$$

同样，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

也确定一个双曲抛物面（如图1—55）。

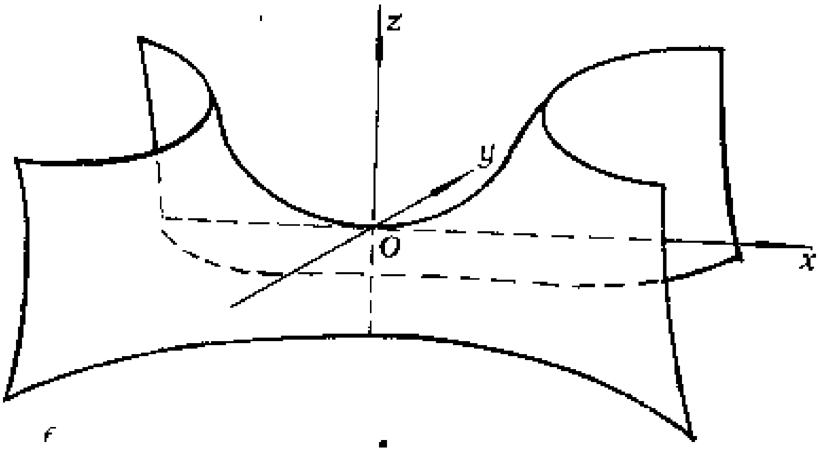


图 1—55

应该注意的是，方程

$$z=xy$$

也表示一种常见的双曲抛物面．对于这种双曲抛物面，用平面$z=k$（$k\neq 0$）去截时，截痕都是双曲线，且这些双曲线在xoy坐标面的投影都是以x轴、y轴为渐近线的等轴双曲线。

问：下列方程各表示什么曲面？

（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=3z$；　　（2）$x^2-y^2-z^2=1$；

（3）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=-1$；　（4）$4(x^2+z^2)-9y^2=36$.

答：（1）方程表示一个椭圆抛物面，其标准方程为：

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{27}=z.$$

（2）方程表示以yoz坐标面为对称平面的双叶双曲面。

（3）方程表示以xoy坐标面为对称平面的双叶双曲面。

（4）方程可化为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1,$$

所以，方程表示以y轴为对称轴的单叶双曲面。

问：什么是二次锥面？二次锥方程的特点是什么？

答：由二次齐次方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a>0, b>0, c>0)$$

所表示的曲面，称为顶点在坐标原点的二次锥面（如图1—56）

二次锥面方程是二次齐次方程，反之，二次齐次方程表示的曲面必是顶点在原点的二次锥面。

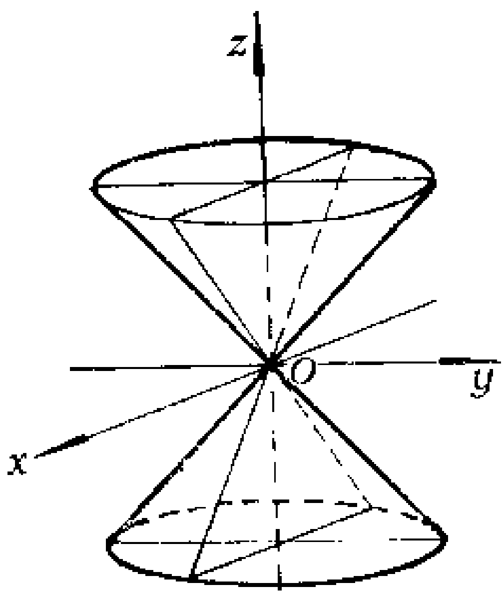


图 1—56

（1）从图1—56可以看出，二次锥面以xOy坐标面对称地分为上、下两部分：

上半锥面的方程为：

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},$$

下半锥面的方程为：

$$z=-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

（2）若用平行于xoy坐标面的平面$z=k$去截二次锥面，则当$k\neq0$时，截面为一个椭圆，其方程为：

$$\begin{cases} z=k \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2} \end{cases} (k\neq0).$$

当 $k=0$ 时，截面为一点，它就是坐标原点。

显然，当 $k>0$ 时；截得的椭圆在 xoy 坐标面的上方；当 $k<0$ 时，截得的椭圆在 xoy坐标面的下方。

（3）当 $a=b=R$时，锥面方程为

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

此时，用平面$z=k$（$k\neq 0$）去截时，截痕为一个圆，其方程为

$$\begin{cases} z=k \\ x^2+y^2=\dfrac{R^2\cdot k^2}{c^2}. \end{cases}$$

我们称这样的锥面为二次旋转锥面。

问：什么样的曲面是柱面？柱面方程的特点是什么？

答：（1）在空间直角坐标系中，如果给定一条平面曲线C及一条定直线．平行于定直线并沿着定曲线C移动的直线L所形成的轨迹叫做柱面．其中，平面曲线C称为柱面的准线，动直线L称为柱面的母线（如图1—57）。

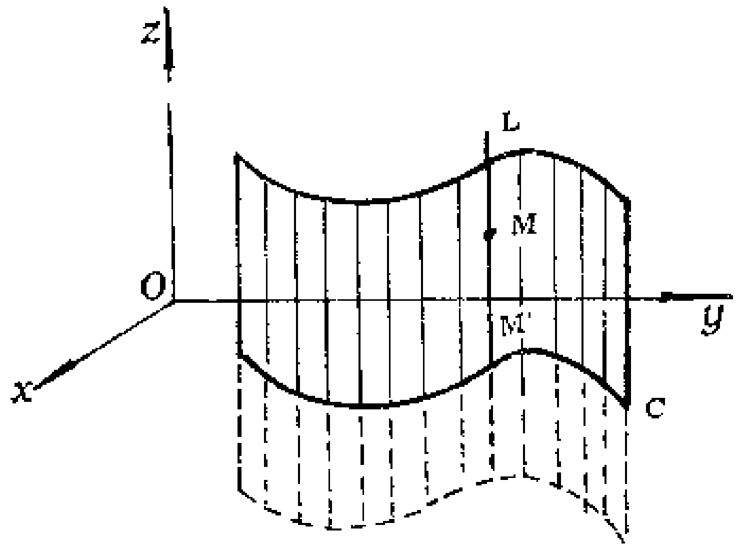


图 1—57

（2）设有一个柱面，它的准线是xoy 坐标面上的一条曲线C，方程为$\phi(x, y)=0$，柱面的母线L 平行于 z 轴。在此柱面

上任取一点$M(x,y,z)$，过M点作直线平行于z轴，此直线交xoy坐标面于$M'(x,y,0)$点，则称点M'为点M在xoy坐标面上的投影，且M'点必在准线C上。

若不在柱面上的任意一点P，则该点在xoy坐标面上的投影P'点必不在准线C上。所以，空间点$M(x,y,z)$在柱面上的充要条件为x,y满足准线C的方程

$$\phi(x,\ y)=0.$$

由于在这个方程中不包含z，所以，以xoy坐标面上曲线C为准线，且母线平行于z轴的柱面方程，是一个不包含变量z的方程

$$\phi(x,\ y)=0.$$

例如，方程$y^2-2x=0$就表示一个柱面。这个柱面的准线为xoy坐标面上的抛物线$y^2-2x=0$，且母线平行于z轴（如图1—58），该柱面称为抛物柱面。

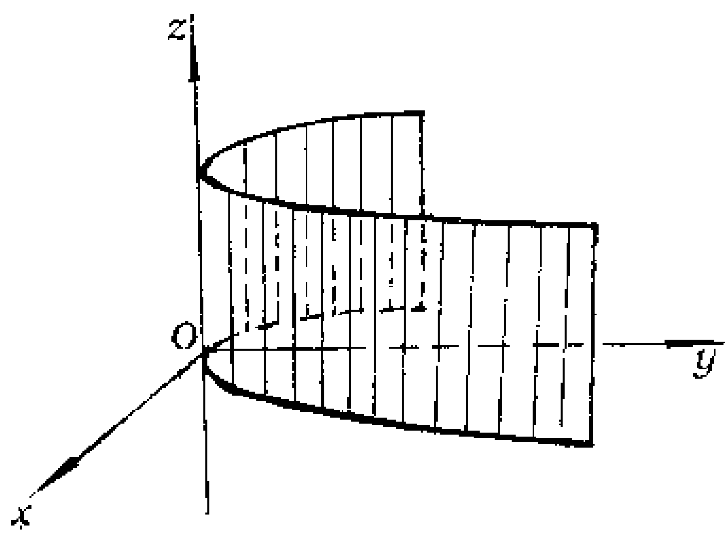


图 1—58

（3）显然，不包含y的方程$\phi(x,\ z)=0$也表示柱面，这个柱面的母线平行于y轴，而准线在xoz坐标面上。例如，方程

$$\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1$$

就表示这样的柱面，这个柱面的母线平行于y轴，准线是在xoz坐标面上的椭圆

$$\frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}=1。$$

该柱面称为椭圆柱面（如图1—59）。

又如，方程$y-2x=0$也表示一个柱面。这个柱面是个平面，它的准线是xoy坐标面上的一条直线$y=2x$，母线平行于z轴（如图1—60）。

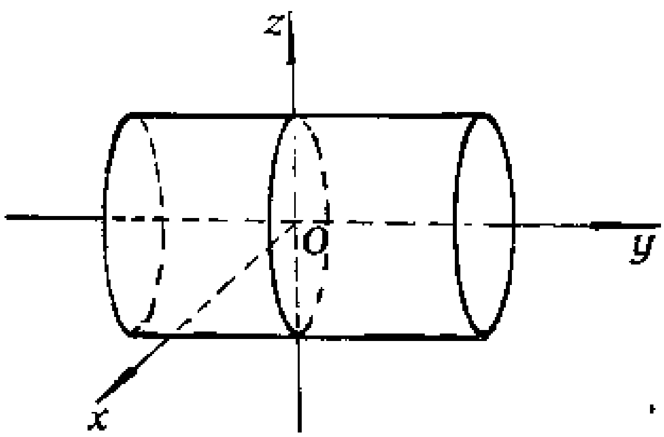


图 1—59

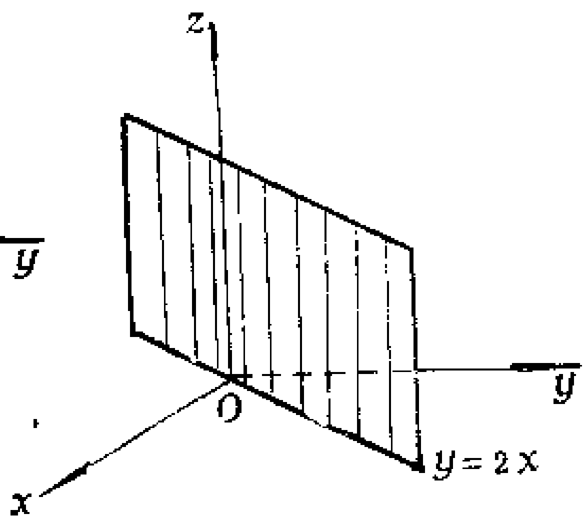


图 1—60

问：什么是二次柱面？常见的二次柱面有哪几种？

答：以二次曲线为准线的柱面称为二次柱面。常见的二次柱面有下面四种：

（1）圆柱面

柱面的准线是xoy坐标面上的圆$x^2+y^2=R^2$，母线平行于z轴的圆柱面方程为：

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

如图1—61所示。

（2）椭圆柱面

柱面的准线是xOy坐标面上的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，母线平行于$z$

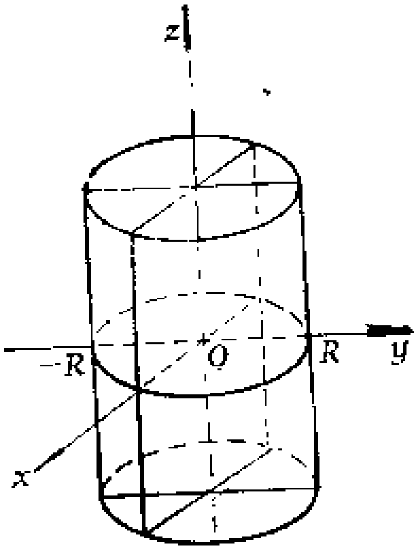


图 1—61

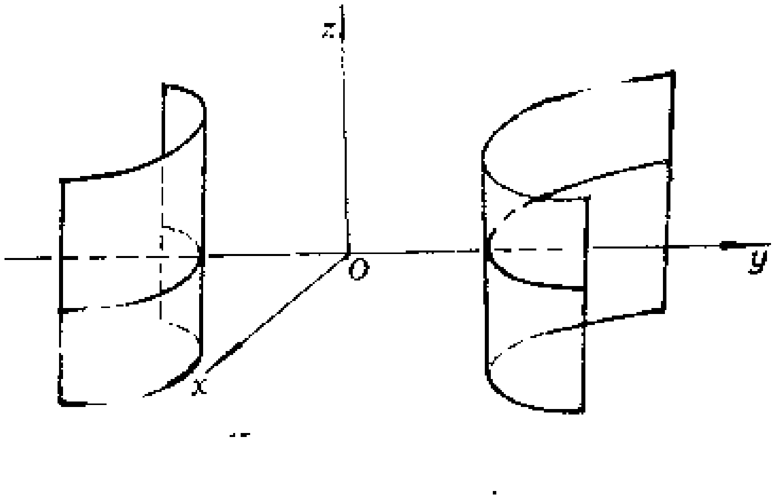


图 1—62

轴的椭圆柱面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

（3）双曲柱面

柱面的准线是xoy坐标面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，母线平行于$z$轴的双曲柱面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

如图1—62所示。

（4）抛物柱面

柱面的准线是xoy坐标面上的抛物线 $x^2=2py$，母线平行于z轴的抛物柱面方程为：

$$x^2-2py=0.$$

如图1—63所示。

问：下列方程各表示什么曲面？

（1）$x^2+y^2-2y=0$；　　（2）$x^2+2z-2x-4z=4$；

（3）$z=x^2$；　　（4）$x^2+y^2-z^2=1\ (z\geqslant 0)$。

答：（1）应用配方法，得

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

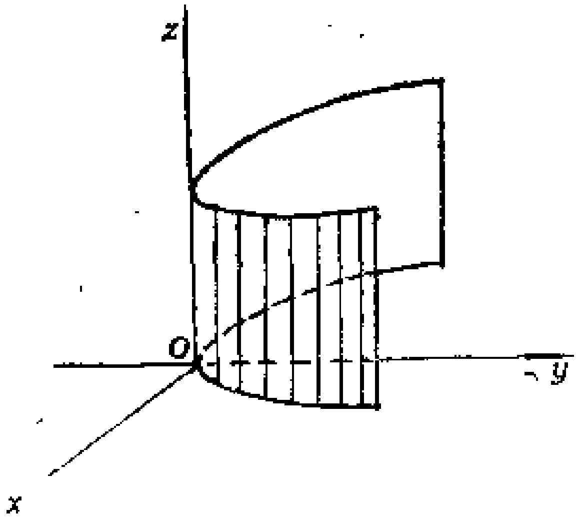


图 1—63

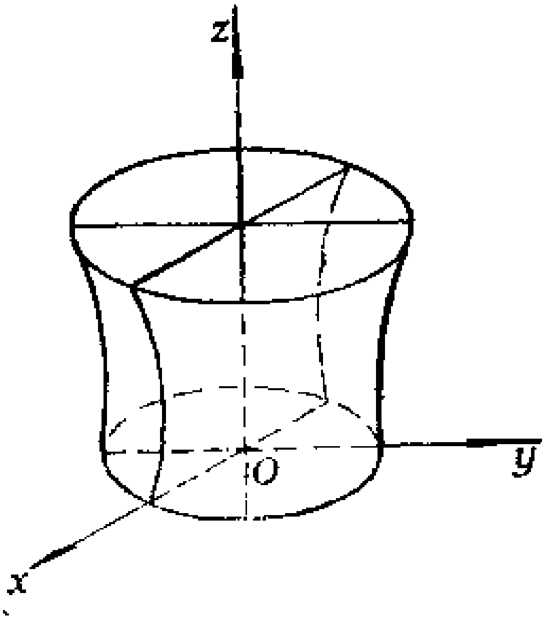


图 1—64

由于方程中不含 z 项，所以方程表示一个柱面．这是一个母线平行于z轴，准线是xoy坐标面上的一个圆的圆柱面．

（2）应用配方法，得

$$(x-1)^2+2(z-1)^2=7.$$

这是一个母线平行于 y 轴，准线是 xoz 坐标面上的椭圆的椭圆柱面．

（3）方程表示柱面．这个柱面的母线平行于 y 轴，准线是xoz平面上的一条抛物线的抛物柱面．

（4）方程表示xoy坐标面上方的半个单叶双曲面（如图1—64）．

七、小　结

在这一章中，我们主要学习了向量代数和空间解析几何的一些基础知识，它们是学习以后各章的基础．

学习这一章应注意下面几个问题：

（1）将向量及向量的数量积、向量积与平面、直线方程联系起来，将平面与直线联系起来，能用向量及向量的运算解决有

关的问题.

（2）在空间直角坐标系中，平面与直线是最简单、最基本的曲面和曲线. 掌握它们标准方程的特点，了解平面和直线各种方程之间的关系是很重要的. 这需要进行一些必要的练习.

（3）二次曲面是这一章的重点内容. 在以后各章的学习中，我们将会经常用到它们，因此要求掌握各种二次曲面方程的特点，能准确的根据不同的方程判断它所表示的曲面及这个曲面的一些基本的特点.

八、思考练习题

1. 指出下列各点位置的特殊性.

（1）(4,0,0)；（2）(0,−2,0)；（3）(0,0,3)；

（4）(1,2,0)；（5）(1,0,2)；（6）(0,2,1).

2. 求出与给定点(2,−3,−1)分别对称于下列坐标面的点的坐标：

（1）xoy；（2）yoz；（3）xoz.

3. 已知A (4,1,3)，B (2,−5,1)，C (3,7,−5)，试写出向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$的投影表达式.

4. 求下列各向量的模和方向余弦：

（1）$\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$；（2）$-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$；

（3）$6\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$.

5. 已知平行四边形的两个邻边是$\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$和$\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，求平行四边形的面积$S$.

6. 作出下列各平面图形，分析其特点：

（1）$3x+2y-6=0$；（2）$x+2z=4$；

（3）$3y+z-1=0$；（4）$x-y=0$；

（5）$x=2z$.

7. 求过点 (1,2,1) 且平行于平面$x+2y-3z+5=0$ 的平

面方程。

8．一平面通过点（2，1，1）且法线向量垂直于向量$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$和$\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$。求此平面的方程。

9．求通过点（1，1，1），且同时平行于平面$x+y-2z+1=0$和$x+2y-z+1=0$的直线方程。

10．作出下列方程表示的曲面：

（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=z$；　（2）$x^2-y^2=z^2$；

（3）$x^2-y^2+z^2=-1$；　（4）$x^2=2y$。

11．画出下列曲面，并分析其特点：

（1）$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$；

（2）$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}-y^2=1$；

（3）$x^2+\frac{z^2}{4}=2y$；

（4）$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$；

（5）$\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$。

12．作出下列曲线在第一卦限内的图形：

（1）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ z=3;\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\ x=3;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x^2+z^2=4,\\ y=2;\end{cases}$　（4）$\begin{cases}x^2+y^2=a^2;\\ x^2+z^2=a^2.\end{cases}$

13．画出下列各组方程所围成的空间区域：

（1）$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0\leqslant z\leqslant 4;\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\\ z=0,\\ x+y+z=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2, \\ z = 0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = xy, \\ z = 0. \end{cases}$

九、思考练习题答案或提示

1．（1）在 x 轴上；（2）在 y 轴上；（3）在 z 轴上；
（4）在 xoy 坐标面上；（5）在 xoz 坐标面上；
（6）在 yoz 坐标面上．

2．（1）$(2,-3,1)$；（2）$-(2,-3,-1)$；（3）$(2,3,-1)$．

3．$\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$， $\overrightarrow{BA}=2\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$，
$\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{k}$， $\overrightarrow{CB}=-\vec{i}-12\vec{j}+6\vec{k}$．

4．（1）$1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$；（2）$1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$；

（3）$9, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$．

5．$S=3\sqrt{10}$．

6．略．

7．$x+2y-3z-2=0$．

8．$5x-3y-7z=0$．

9．$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$．

10．—13．略．

第二章　多元函数微分法及其应用

在这一章中，我们将在一元函数微分学的基础上，以二元函数为重点，学习多元函数的微分法及其应用。多元函数微分法与一元函数微分法之间，既有密切的联系，又有明显的质的区别。因此，在学习本章时，注意与一元函数微分法进行对照比较，找出它们之间的联系与区别是非常重要的。

与一元函数微分学相类似，我们首先学习多元函数的概念、多元函数极限与连续的概念，然后进一步研究多元函数的偏导数、全微分以及复合函数、隐函数的微分法，最后学习多元函数微分法的一些应用。

学习本章的要求：

1. 了解二元函数的定义，会求二元函数的定义域及用平面图形表示二元函数的定义域。

2. 了解二元函数极限及连续的定义，知道一切多元初等函数在其定义域内是连续的。

3. 掌握一阶偏导数的定义及其几何意义，熟练掌握一阶偏导数及二阶偏导数的计算方法，了解一阶偏导数与连续性的关系。

4. 理解全微分的概念，熟练掌握全微分的计算方法；理解二元函数在某点可微的条件。

5. 掌握复合函数的微分法；会求隐函数的偏导数。

6. 了解用一阶全微分的形式不变性计算函数的微分和偏导数的方法。

7. 会求空间曲线的切线、法平面以及曲面的切平面及法线。

8. 掌握二元函数极值存在的必要条件和充分条件。

9. 会用拉格朗日乘数法求条件极值问题。

本章的重点是：偏导数的定义；复合函数的微分法；条件极值。

一、多元函数

问：什么是多元函数？

答：我们把依赖于两个或两个以上自变量的函数称为多元函数，记为$z=f(x,y)$，…，$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。一般来说，多元函数所依赖的各个自变量处于相互独立的地位，它们的值可以在一定范围内任意独立地选取。

与一元函数相类似，我们把多元函数自变量的取值范围称为多元函数的定义域。

问：学习多元函数微分法时，为什么以二元函数微分法为主？

答：我们将会看到，从依赖于一个自变量的一元函数推广到依赖于两个自变量的二元函数会产生一些全新的质的变化。例如，二元函数的定义域、二元函数的极限等等与一元函数都有质的差异。但从二元函数推广到n（$n\geqslant 3$）元函数时，就没有什么本质上的不同，很多问题仅是技术上的推广。所以，今后我们将以研究二元函数为主。

问：什么叫二元函数？

答：二元函数的定义是：设有变量x，y和z。如果当变量x，y在一定范围内任意取定一对值时，变量z按照一定的法则，总有确定的数值和它们对应，则z叫做x，y的二元函数，记作

$$z=f(x,y)。$$

其中变量x，y叫做自变量，z叫做因变量。自变量x，y的变化范围叫做函数的定义域。

根据这个定义，$z=c$（c为常数）以及

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y\text{不同时为零})\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

都是二元函数。前者是一个特殊的二元函数（常数函数），后者是一个分段函数。

需要注意的是：二元函数$z=f(x,y)$中，自变量在定义域

内可以独立地取值，即 x 取值与 y 取值没有必然的联系，而且有可能出现 x 可以取不同的值，而 y 的值是不变的，或 y 可以取不同的值而 x 的值是不变的情况。

问：如何理解二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何意义？

答：和一元函数类似，我们也是将函数的分析表达式同它的几何解释联系起来进行研究的。设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 xoy 坐标面上某一区域 D，对于 D 中的每一点 $P(x,y)$，在空间可以作出一点 $M(x,y,f(x,y))$ 与它对应，当点 $P(x,y)$ 在 D 中变动时，点 $M(x,y,f(x,y))$ 就在空间相应地变动。一般说来，它的轨迹是一个曲面（如图2—1）。

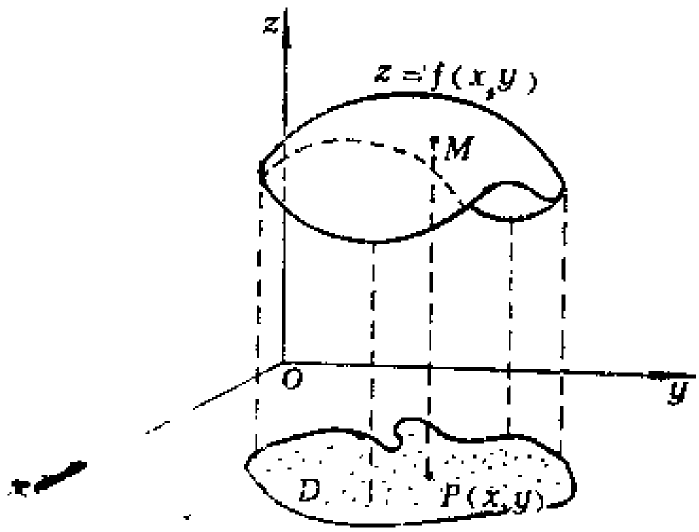


图 2—1

这个曲面就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形。

例如，在直角坐标系中，函数 $z=c$ 的图形是一个平行于 xOy 坐标面，且距离为 c 的平面（图2—2）。

又如，方程

$$x^2+y^2+z^2=1$$

所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是一个球心在原点，半径为1的球面（图2—3）。

这个函数有两个对应值，一个为 $\sqrt{1-x^2-y^2}$（上半球面），另一个为 $-\sqrt{1-x^2-y^2}$（下半球面），因此，这是多值函数。

问：什么叫区域？

答：在平面上由一条或几条曲线所围成的部分称为平面区域或叫

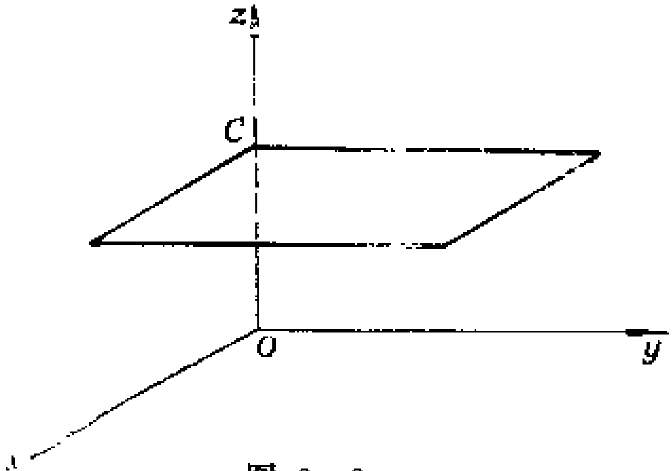


图 2—2

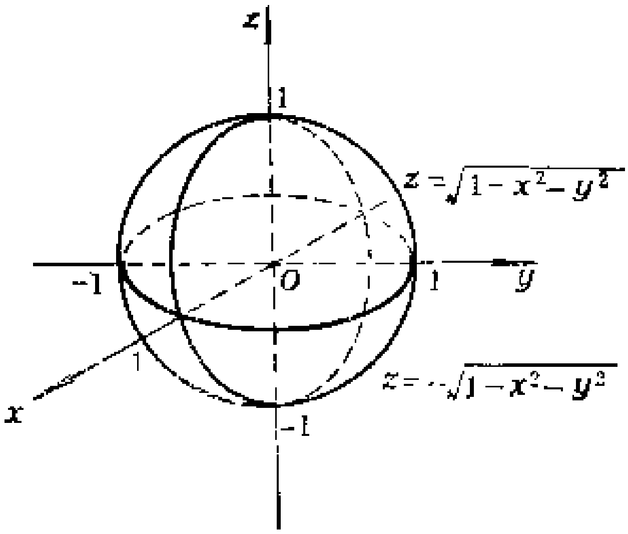


图 2—3

区域．围成区域的曲线称为区域的边界．包括边界在内的区域称为闭区域（如图2-4中的D）；不包括边界在内的区域称为开

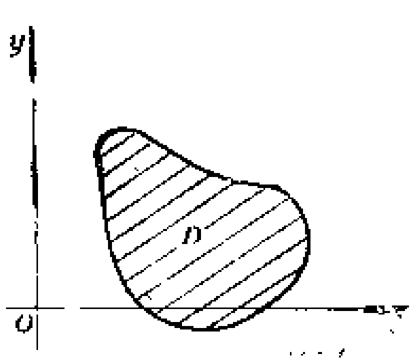


图 2—4

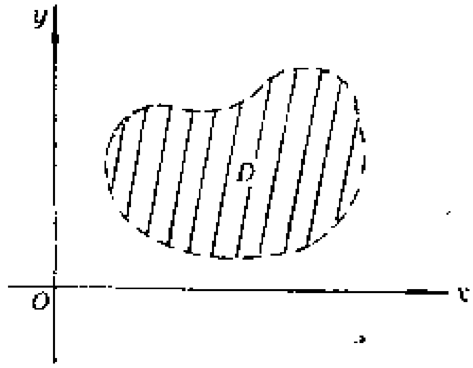


图 2—5

区域（如图2—5中的D）。

如果区域可以延伸到无限远处，就称这区域是无界的；否则的话，它总可以被包围在一个以原点为中心而半径适当大的圆内，这样的区域称为有界的。显然，图2—4与2—5所表示的区域D都是有界区域，而图2—6表示的区域D则是无界区域。

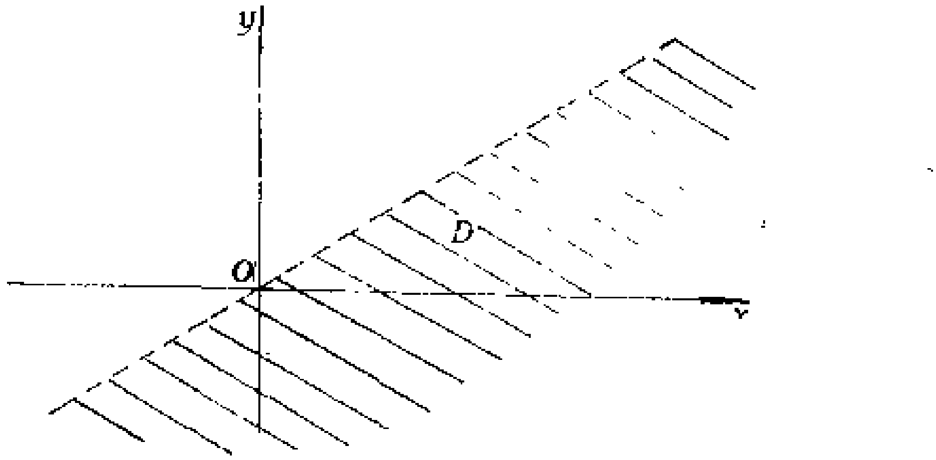


图 2—6

区域D常用联立不等式来表示。

例如，联立不等式

$$\begin{cases} 1-x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

就表示一个有界闭区域D（如图2—7）

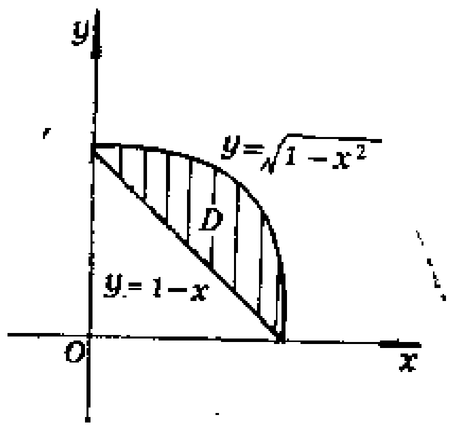


图 2—7

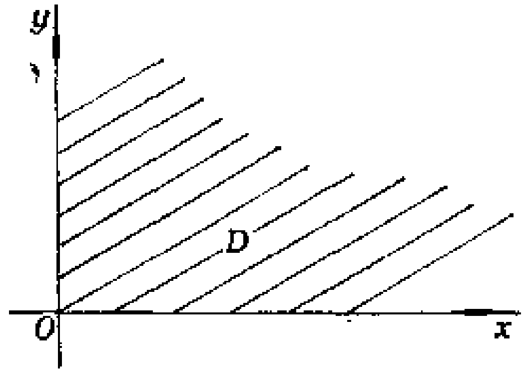


图 2—8

又如，联立不等式

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

表示的区域D为xOy坐标面的第一象限（图2—8），这是个无界区域。

问：如何求二元函数$z=f(x,y)$的定义域？

答：我们可以用类似于求一元函数定义域的方法求二元函数的定义域。在求二元函数定义域时，应注意，若函数的自变量具有某种实际意义，则应该根据它的实际意义来决定其取值范围，即由此来确定函数的定义域。例如，圆柱体的体积V是它的底面半径R和高H的函数，即

$$V=\pi R^2 H,$$

则这个函数的定义域为

$$\begin{cases} R>0, \\ H>0. \end{cases}$$

对于用分析表达式表示的函数，只要使表达式有意义的自变量取值范围，就是函数的定义域。

例如，求下列各函数的定义域D：

（1）$z=\ln(x^2+y^2-1)$；　（2）$z=\arcsin(x+y)$；

（3）$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；（4）$z=\dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$.

解：（1）要使函数z的表达式有意义，自变量x,y必须满足不等式

$$x^2+y^2-1>0,$$

所以函数$z=\ln(x^2+y^2-1)$的定义域D为

$$x^2+y^2>1.$$

其图形为圆周边界$x^2+y^2=1$外面的无界区域（如图2--9）

（2）由$|x+y|\leqslant 1$，得

$$\begin{cases} x+y\leqslant 1, \\ x+y\geqslant -1. \end{cases}$$

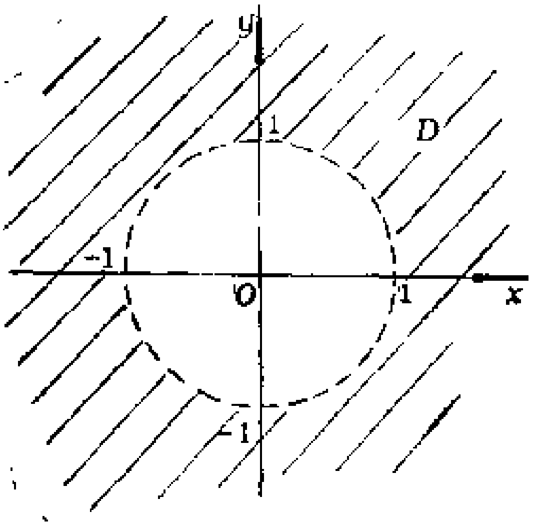


图 2—9

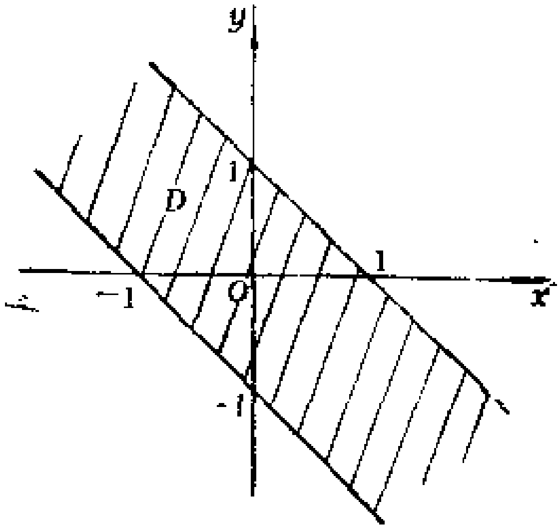


图 2—10

所以函数 $z=\arcsin(x+y)$ 的定义域 D 是

$$\begin{cases} y\leqslant 1-x, \\ y\geqslant -1-x. \end{cases}$$

其图形是夹于直线 $y=1-x$ 和 $y=-1-x$ 之中且包括这两条直线的条形无界区域（如图2—10）。

（3）函数 $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域 D 为

$$\begin{cases} y-x>0, \\ x\geqslant 0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

其图形是个扇形有界区域（如图2—11）。

（4）函数 $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的定义域 D 是

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$$

其图形是不包含坐标原点的平面无界区域（如图2—12）。

问：若某一二元函数的定义域 D 在第Ⅰ象限，是由 $x^2+y^2=1$ 及

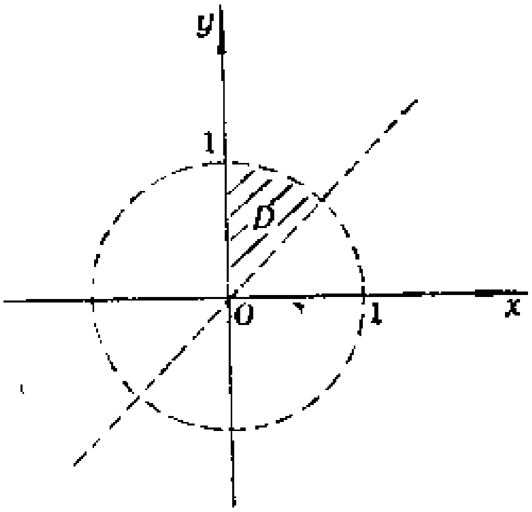


图 2—11

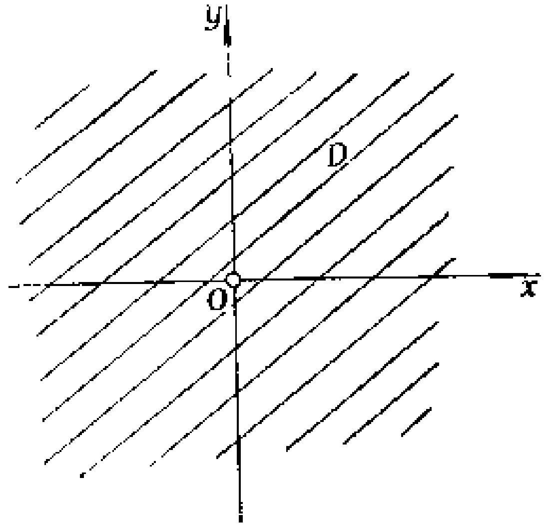


图 2—12

$y=1-x$围成的开区域，如何用联立不等式表示该区域？并画出图形。

答：定义域D在第Ⅰ象限，则

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$$

又定义域D由圆$x^2+y^2=1$及直线$y=1-x$围成，

即$\begin{cases} x^2+y^2<1, \\ y>1-x. \end{cases}$

综上所述，定义域D用联立不等式表示为

$$\begin{cases} 1-x<y<\sqrt{1-x^2}, \\ 0<x<1. \end{cases}$$

其图形如图2—13所示.

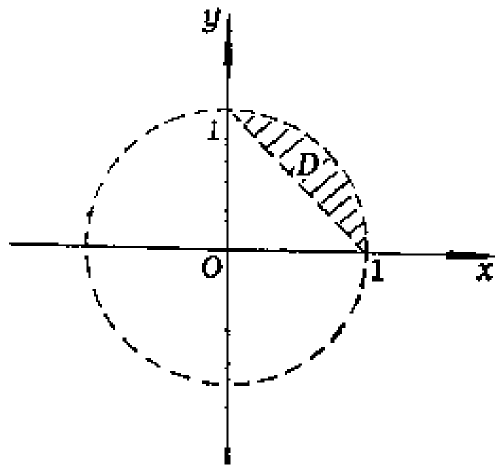


图 2—13

问：$z_1=\ln[x(x-y)]$ 与 $z_2=\ln x+\ln(x-y)$ 表示的是同一个函数吗？

答：和一元函数一样，二元函数的定义也是包含了两个要素，一

是定义域，二是对应关系．这两个函数如果它们的定义域和对应关系都相同，则为同一函数．如果有一个不同，就不是同一函数．

这里，$z_1=\ln[x(x-y)]$的定义域是

$$x(x-y)>0$$

即 $\begin{cases} x>0, \\ x>y; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<0, \\ x<y. \end{cases}$

而$z_2=\ln x+\ln(x-y)$的定义域是

$$\begin{cases} x>0, \\ x>y. \end{cases}$$

因此，$z_1=\ln[x(x-y)]$与$z_2=\ln x+\ln(x-y)$不表示同一函数。

问：什么叫是P_0的δ邻域？

答：以平面上$P_0(x_0,y_0)$为中心，$\delta(>0)$ 为半径的小圆形开域称为点$P_0(x_0,y_0)$的δ邻域（如图2—14），表示为：

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta。$$

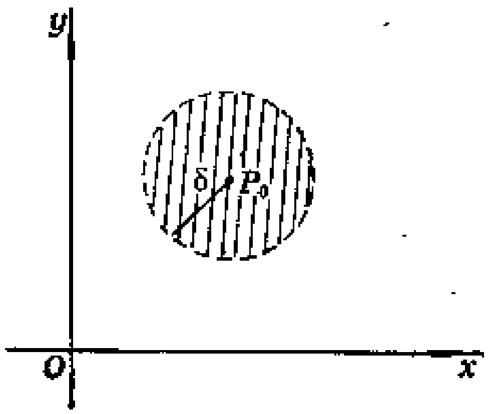


图 2—14

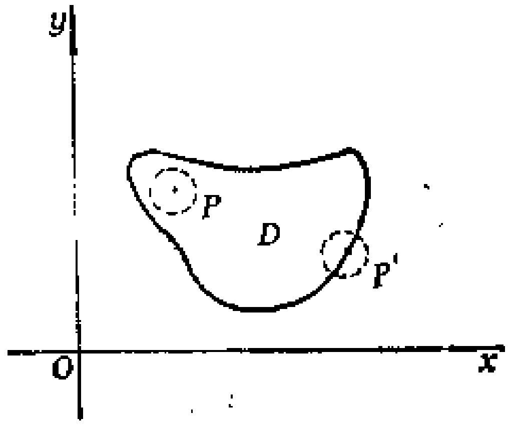


图2—15

邻域内的任意一点$P(x,y)$ 都满足不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

即点$P(x,y)$ 与$P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于δ。由于δ比较小，所以，邻域内的所有点$P(x,y)$ 都分布在点$P_0(x_0,y_0)$ 的周围附近。

问：什么是区域的内点与边界点？

答：如果点 $P(x,y)$ 的某个邻域完全包含在区域D内，则称点

$P(x,y)$ 为区域D的一个内点（如图2—15）。显然，如果区域D是开区域，则区域D内的所有点都是内点．如果不论点$P'(x',y')$的邻域如何小，在邻域内总包含区域D内的点和区域D外的点，则称点$P'(x',y')$为区域D的边界点（如图2—15）．

二、二元函数的极限

问：二元函数自变量的变化方式有什么特点？

答： 我们知道，一元函数$y=f(x)$仅有一个自变量x，当x趋近于x_0时，趋近的方式有三种，即从小于x_0的方向趋近于x_0；从大于x_0的方向趋近于x_0；从小于和大于x_0的两个方向同时趋近于x_0．但不论x以何种方式趋近于x_0，点x与定点x_0之间的距离总是无限变小的．所以，在一元函数的极限中，总是用两点间距离的无限变小来表达这两点的无限趋近．

在二元函数$z=f(x,y)$中有两个自变量x,y，且这两个自变量的取值是相互独立的．因此，当平面点$P(x,y)$趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$时，其趋近的方式是多种多样的，它可以从任何方向以直线方式、曲线方式或跳跃方式无限趋近于$P_0(x_0,y_0)$（如图2—16）．

所以，在研究二元函数自变量的变化过程时，应注意变化方式的任意性．这远比一元函数自变量的变化方式要复杂得多，但不论点$P(x,y)$趋近于定点$P_0(x_0,y_0)$的方式多么复杂，总可以用这两点之间距离的无限变小来表示，即

$$|PP_0|=\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

问：如何理解二元函数的极限概念？

答： 二元函数有两个等价的极限定义：

定义1： 函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义（在点P_0可以没有定义），$P(x,y)$是邻域内的任意一点，当点P以任何方式无限接近于点P_0时，函数的对应值$f(x,y)$无限接近于一个确定的常数A，则称常数A是函数$f(x,y)$当$P(x,y)$

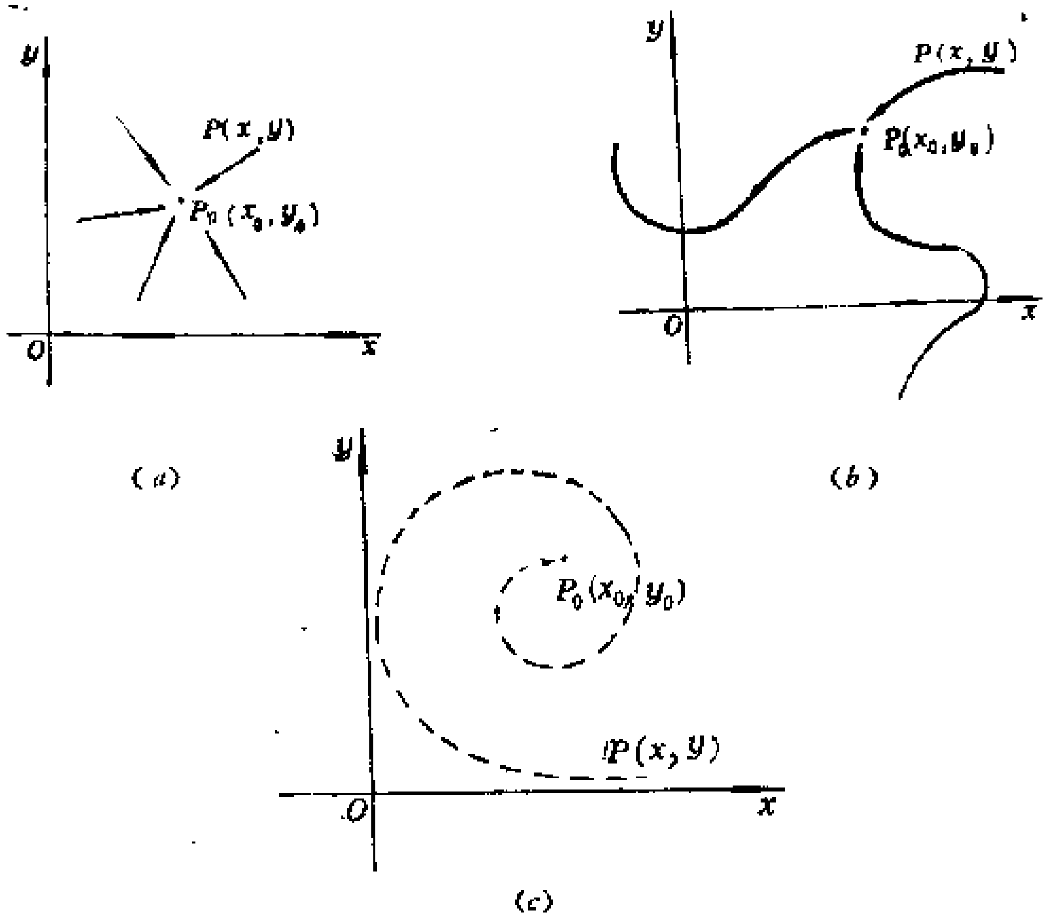


图 2—16

$\to P_0(x_0,\ y_0)$，或$x\to x_0$、$y\to y_0$，或$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \rho\to 0时，f(x,y)\to A.$$

对于定义 1，要注意以下几点：

（1）与一元函数极限相同，二元函数的极限也不研究点$P_0(x_0,y_0)$处函数的状态，仅研究点$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$的过程中，函数$f(x,y)$的变化趋势．所以，在定义中明确规定，函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义，但不要求函数在点$P_0(x_0,y_0)$处有定义．

（2）点$P(x,y)$是以$P_0(x_0,y_0)$为圆心的某个小邻域内的任意一点，它可以无限接近$P_0(x_0,y_0)$，但不等于$P_0(x_0,y_0)$．

特别应该注意的是，$P(x,y)$趋于$P_0(x_0,y_0)$的方式是任意的．也就是说，只有当$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，

都无限接近常数 A，则这个常数 A 才是 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限。

（3）点$P(x,y)$ 无限趋近于$P_0(x_0,y_0)$，等价于：$x\to x_0$且$y\to y_0$，和$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$。

应该指出的是，把$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$写成：$x\to x_0$、$y\to y_0$，绝不意味着：x 先趋于x_0，然后y再趋近于y_0。这两个过程是同时进行的，即$x\to x_0$的同时有$y\to y_0$。这样定义的极限称为全面极限。

（4）极限值 A 应是一个确定的常数。它与 $P(x,y)$ 趋近 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式无关。

定义2：函数 $z=f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义（在点P_0可以没有定义），如果对于任意的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得对于适合不等式

$$0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点$P(x,y)$ 所对应的函数值$f(x,y)$，总有不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立（其中A为一个确定的常数），则常数A称为函数$z=f(x,y)$当$x\to x_0$、$y\to y_0$，或$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$ 时的极限。记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$$

时，$f(x,y)\to A$。

对于定义 2，要注意以下几点：

（1）ε是一个与极限过程无关的任意取定的正数。它标志着函数$f(x,y)$ 与常数 A 的接近程度，δ则是与ε相对应的小正数，它表示$P(x,y)$接近$P_0(x_0,y_0)$的程度。一般地，ε 越小，δ也越小。

（2）不等式 $0<\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 表示，在以$P_0(x_0,y_0)$为圆心，以δ长为半径的小圆形开域内的任意一点$P(x,y)$，与$P_0(x_0,y_0)$之间的距离小于δ，同时大于零。即$P(x,y)$可以趋近于 $P_0(x_0,y_0)$，但$P(x,y)\neq P_0(x_0,y_0)$。这也表明，二元

函数的极限仅研究$P(x, y)$趋于$P_0(x_0, y_0)$过程中二元函数$f(x,y)$的变化趋势，而不研究点$P_0(x_0,y_0)$处函数的状态。

（3）不等式：$|f(x,y)-A|<\varepsilon \Longleftrightarrow A-\varepsilon<f(x,y)<A+\varepsilon$，由于$\varepsilon$可以任意小，故点$P_0(x_0,y_0)$邻域内一切点$P(x,y)$对应的函数值与$A$就可以任意接近，以至要多近就有多近。这样，常数$A$就是函数$f(x,y)$当$P(x,y)\longrightarrow P_0(x_0,y_0)$时的极限。

问：当x沿x轴趋于零，y沿y轴趋于零时，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

趋于零，则这个函数的极限必存在且是零吗？

答：当$x\to 0$，$y\to 0$时，函数$f(x, y)$的极限不存在。因为当$P(x,y)$沿x轴、y轴趋于零时，有

$$f(x,y)\to 0 .$$

但当$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=x)}}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1 .$$

这就是说，当点$P(x,y)$以不同方式趋于$(0,0)$时，函数$f(x,y)$趋于不同的常数。所以，函数$f(x,y)$当$P(x,y)\to(0,0)$时，无极限。

问：当点$P(x,y)$沿任意方向的直线趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$总趋于常数A，则函数$f(x,y)$当$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时必有极限且等于A吗？

答：不一定。从二元函数极限的定义可以看出，点$P(x,y)$以任意方向的直线方式趋于点$P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$有同一个极限，仅是$P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时，函数$f(x,y)$有极限的必要条件，而不是充分条件。也就是说，虽然点$P(x,y)$沿任何一条通过点$P_0(x_0, y_0)$的直线趋于点$P_0(x_0, y_0)$时〔$P(x, y)\neq P_0(x_0, y_0)$〕，函数$f(x,y)$趋于一个确定的常数，但$\lim\limits_{\rho\to 0}f(x,y)$

仍可能不存在。

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x^2+y^2=0).\end{cases}$$

当点$P(x,y)$沿x轴、y轴趋于零时，有$f(x,\ y)\to 0$，且点$P(x,y)$沿直线$y=kx$（$k\neq 0$）趋于（0，0）时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=kx)}}\frac{k^2\cdot x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0.$$

但当点$P(x,y)$沿抛物线$y^2=x$趋于（0,0）时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y^2=x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

因此，当点$P(x,y)$以不同方式趋于零时，函数$f(x,y)$趋于不同的常数，所以，函数$f(x,y)$当$P(x,y)\to(0,0)$时，无极限。

问：若$\lim\limits_{y=kx\to 0}f(x,y)=\phi(k)\neq c$，则必定不存在$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$吗？

答：是的。由于对不同的k值，$\lim\limits_{y=kx\to 0}f(x,y)=\phi(k)$不同，因而由极限定义可知，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在。

需要指出的是，这个命题常用于作为判定极限不存在的准则。

比如，由这个命题立即可判定$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}$不存在。这是因为让$P(x,y)$沿$y=kx$趋于$(0,0)$时，有$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ (y=kx)}}\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$.

问：如何用定义证明下列各极限？

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}=0$.

答:我们可以仿照证明一元函数极限的方法证明二元函数的极限.

证明: (1) 对任意的$\varepsilon>0$, 欲使

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \quad 成立,$$

即
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon \quad 成立,$$

亦即
$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}<\varepsilon \quad 成立.$$

由于
$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

令 $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$, 于是 $\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$.

取 $\delta=2\varepsilon$, 则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=2\varepsilon$时, 有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon \quad 成立.$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

(2) 对任意的$\varepsilon>0$, 欲使

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \quad 成立,$$

即
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \quad 成立,$$

亦即
$$\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}<\varepsilon \quad 成立.$$

由于
$$\frac{|x^2y|}{x^2+y^2}=\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\frac{|2xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

令 $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\varepsilon$， 于是$\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$，

取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta=2\varepsilon$时，

有 $$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \quad \text{成立，}$$

$$\therefore \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

问：如何求下列极限？

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x(y+1)}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2\cdot y^2}$；　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$。

答：我们可以仿照一元函数极限的计算方法，并利用一元函数极限的一些结论求二元函数的极限。

解：（1）
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)$$
$$=2.$$

（2）
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{x(y+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y\cdot\sin(xy)}{xy(y+1)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\frac{y}{y+1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{y+1}$$

$$=1\cdot 0=0.$$

(3) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)\cdot x^2y^2}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x^2+y^2}{2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\cdot x^2y^2}(x^2+y^2)$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{\sin\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\infty.$$

(4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1.$$

三、二元函数的连续性

问：如何理解二元函数的连续性？

答：与一元函数连续性的三个等价定义相类似，二元函数连续性也有三个等价的定义．即

定义1：函数 $z=f(x,\ y)$ 在点P_0 $(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域内有定义(在点P_0处也有定义)，若$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(x_0,\ y_0)$，则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 处是连续的．

定义2：函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$的某个邻域内有定义（在点P_0处也有定义），若对任意$\epsilon>0$，总存在$\delta>0$，当

$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，总有不等式

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 处连续。

定义3：函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域内有定义（在点P_0处也有定义），当自变量x在点x_0处取得增量Δx，因变量 y 在点y_0处取得增量Δy时，函数 z 有对应的全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)$$

〔点$P(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 也在点P_0的邻域内〕，若

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)]=0,$$

则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 处连续。

从上述二元函数连续性的三个等价定义可以看出，二元函数在点$P_0(x_0,y_0)$ 处的连续性，要求以下三个条件同时成立，即

（1）函数 $z=f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域内有定义，且在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 处也有定义。

（2）函数在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 有极限。

（3）函数在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 处的极限值等于该点函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\ .$$

所以，二元函数连续性研究函数$f(x,\ y)$ 在点$P_0(x_0,\ y_0)$ 的整个邻域内的变化情况，也就是说，函数 $f(x,y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$处连续，则函数在该点处的函数值$f_0(x_0,\ y_0)$ 与其邻近各点$P(x,\ y)$ 的函数值相差很小，以至于要多小有多小。

如果函数 $z=f(x,\ y)$在区域D内的每一点处都连续，则函数在这个区域D内是连续的。这时图形是一个无孔隙、无裂缝的绵密曲面。例如，函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在区域D：$x^2+y^2\leqslant 1$上连续，这个函数的图形是一个无缝隙的上半球面（如图2—17）。

问：如何应用二元函数连续的分析定义证明下列函数在点$O(0,0)$处的连续性？

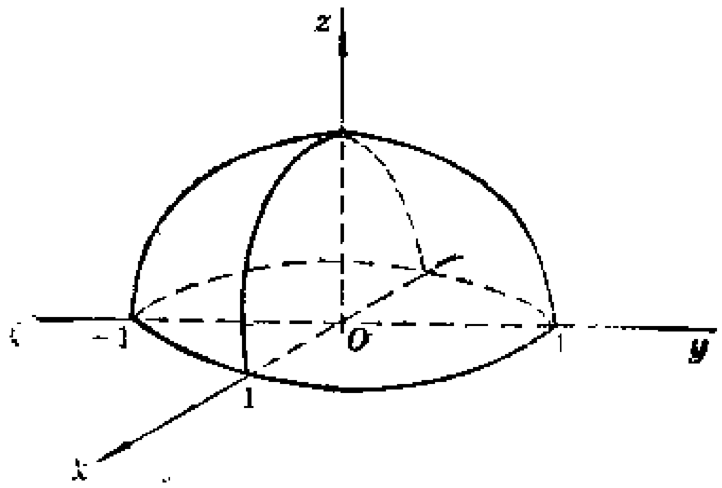


图 2—17

$$(1)\ f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x=y=0). \end{cases}$$

$$(2)\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x=y=0). \end{cases}$$

答： 类似证明二元函数极限的方法，证明二元函数的连续性。

证明：（1）对任意的$\varepsilon>0$，欲使不等式

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \quad 成立,$$

即
$$\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \quad 成立.$$

由于$\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=|xy|\cdot\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|xy|\leqslant x^2+y^2$,

令　$x^2+y^2<\varepsilon$，　于是$\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{\varepsilon}$,

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon}$ 时，有

$$\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立.

∴　函数$f(x,y)$ 在点$O(0,\ 0)$ 处连续.

（2）对任意的$\varepsilon<0$，欲使不等式

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \quad \text{成立}$$

即
$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon \quad \text{成立,}$$

由于
$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|$$
$$=|x|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$$
$$\leqslant|x|+|y|$$
$$\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2},$$

令 $2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$，　于是$\sqrt{x^2+y^2}<\frac{\varepsilon}{2}$，

取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，　则当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$时，有

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立。

∴　函数$f(x,\ y)$在点$O(0,\ 0)$处连续。

问：如果一元函数$f(x,\ y_0)$和$f(x_0,\ y)$分别在点x_0和y_0处连续，那么二元函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处一定连续吗？

答：不一定。

根据二元函数连续的定义，当$x\to x_0$，$y\to y_0$时，函数$f(x,\ y)$的极限存在，并且等于它在点$(x_0,\ y_0)$处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

那么二元函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处连续。这时，就有

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,\ y_0),$$

$$\lim_{y\to y_0} f(x_0,\ y)=f(x_0,\ y_0)\ .$$

即一元函数$f(x,\ y_0)$和$f(x_0,\ y)$分别在x_0和y_0处连续。

反之，如果$f(x,\ y_0)$和$f(x_0,\ y)$分别在x_0和y_0处连续，那么二元函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$处不一定连续，例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x=y=0).\end{cases}$$

由于$f(x,\ 0)$恒等于零，因此它在$x=0$处连续；同样，$f(0,\ y)$在$y=0$处连续。但当点$P(x,\ y)$沿直线$y=kx$趋近于点$(0,\ 0)$时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

因此，当$x\to 0$，$y\to 0$时，函数$f(x,\ y)$的极限不存在，所以，函数$f(x,\ y)$在点$(0,\ 0)$处不连续。

问：什么是二元函数的间断点？二元函数间断点的特点是什么？

答：二元函数$z=f(x,\ y)$的不连续点称为间断点。二元函数的间断点可能是平面上的一个点，几个点，一条曲线或几条曲线。例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

的间断点为一个点，即点$O(0,\ 0)$。

函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{|y-x^2|}}+\dfrac{1}{y+x}$的间断点为两条曲线：

$$y=x^2 \quad 和 \quad y=-x$$

问：函数 $f(x,y)=\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$在点 $P_0(0,1)$处连续吗？为什么？

答：连续。因为函数$f(x,\ y)$在点$P_0(0,\ 1)$处的极限值等于该

点的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=f(0,\ 1)=1.$$

问：多元连续函数有哪些基本性质？

答：与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有下列基本性质：

1．最大值与最小值定理：

在有界闭区域D上的多元连续函数，在该区域上至少取得它的最大值与最小值各一次。

2．介值定理：

在有界闭区域D上的多元连续函数，如果取得两个不同的函数值，则它在该区域上取得介于这两个数值之间的任何值至少一次。

3．四则运算定理：

多元连续函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍为连续函数。

4．多元复合函数的连续性定理：

多元连续函数的复合函数仍为连续函数。

问：如何证明，函数 $f(x,\ y)=\ln(x+y-1)$ 在定义域D：$x+y-1>0$内连续？

答：我们可以运用一元函数的连续性及多元连续函数的四则运算与复合函数的连续性定理，来证明上述二元函数在其定义域D内的连续性。

证明：设$u=x+y-1$，则有

$$f(u)=\ln u,\quad u=x+y-1.$$

因为一元函数$f(u)=\ln u$ 当$u>0$时连续，

又，二元函数$u=x+y-1$ 在区域D：$x+y-1>0$ 内也连续，所以，根据多元复合函数的连续性定理，复合函数$f(x,y)$ $=\ln u \xlongequal{u=x+y-1} \ln(x+y-1)$ 在定义域D内连续。

问：什么是多元初等函数？如何确定多元初等函数的连续区域？

答：与一元初等函数相类似，多元初等函数也是由一个解析式表示的函数，这个解析式是由含多个自变量(如 x，y 等)的基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的。例如，

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{3x+x^2-y^2}{1+x^3}}\ ,\quad f(x,y)=\sin\sqrt{1-x^2-y^2}$$

等都是多元初等函数。

根据多元连续函数的基本性质，可以证明：一切多元初等函数在其定义域内都是连续的。所以，多元初等函数的连续区域就是多元初等函数的定义域。

例如，函数 $f(x,y)=\arcsin x+\arcsin y$ 的连续区域求解如下：

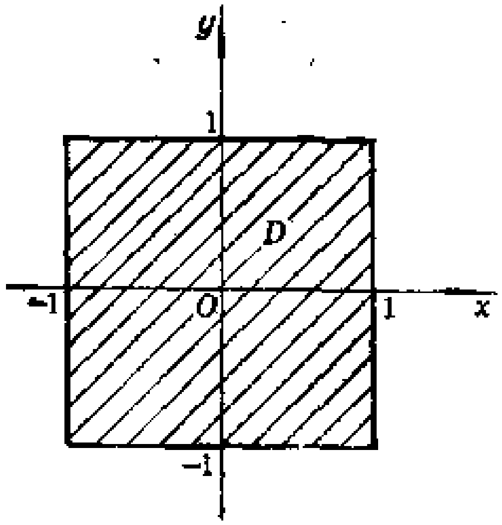


图 2—18

由于二元初等函数的定义域就是该函数的连续区域，所以，函数

$$f(x,y)=\arcsin x+\arcsin y$$

的连续区域 D 为：

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\ ,\\ -1\leqslant y\leqslant 1\ .\end{cases}$$

如图2—18所示。

又如，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 的连续区域为不包含坐标原点的整个平面。

问：如何利用多元初等函数的连续性，求下列极限？

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}(\arcsin x+\arcsin y)$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -e}}\ln(1+x-y)$。

答：首先求出函数的连续区域 D，如果点 $P_0(x_0,\ y_0)\in D$，则根据多元初等函数连续性，得

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\ .$$

解：（1）∵ $f(x,y)=\arcsin x+\arcsin y$ 的连续性区域D为：

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -1\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

且$P_0(1,-1)\in D$，

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}(\arcsin x+\arcsin y)=\arcsin 1+\arcsin(-1)$$

$$=\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=0.$$

（2）∵ $f(x,y)=\ln(1+x-y)$的连续区域D为：

$$1+x-y>0,$$

且$P_0(-1,-e)\in D$，

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to -1\\ y\to -e}}\ln(1+x-y)=\ln[1+(-1)-(-e)]=1.$$

四、偏 导 数

问：函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x和对y的偏导数是怎样定义的？

答：函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数的定义是：

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0，而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0y_0)}{\Delta x} \qquad ①$$

存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.z_x'\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad f'_x(x_0,y_0)$$

或 $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $f_x(x_0, y_0)$

“∂z”读作“偏z”，“∂x”读作“偏x”等。

类似地，函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对y的偏导数定义为下列极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad ②$$

记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad z_y'\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad f'_y(x_0, y_0),$$

或 $z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $f_y(x_0, y_0)$.

在上面定义的①式中，关于x增量Δx的函数增量是：$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$，在②式中，关于$y$增量$\Delta y$的函数增量是：$f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$。我们称这两个增量为函数$z=f(x, y)$关于$x$和$y$在点$(x_0, y_0)$处的**偏增量**。

比值$\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$与$\dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

分别是区间$[x_0, x_0+\Delta x]$与$[y_0, y_0+\Delta y]$上函数z对x和y的平均变化率。当$\Delta x\to 0$或$\Delta y\to 0$时，这两个平均变化率的极限就是z对x或y的变化率了。所以，二元函数$z=f(x, y)$关于x和y的偏导数反应了二元函数在点$P_0(x_0, y_0)$处分别对x和y的变化率，即函数沿平行于x轴或平行于y轴两个特殊方向的变化率。

需要注意的是：

偏导数的符号$\dfrac{\partial z}{\partial x}$与$\dfrac{\partial z}{\partial y}$应看成一个整个的记号，不能将它们看成$\partial z$与$\partial x$或$\partial y$的商。

问：如何计算二元函数$z=f(x, y)$的偏导数？

答：从二元函数偏导数的定义可以看出，计算二元函数偏导数不需要什么新的方法，仅需分别固定一个自变量（即将该自变量在

求导过程中视为常数），然后应用一元函数的求导法，求函数关于另一个自变量的导数即可。

例如，求下列各函数在指定点的偏导数：

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$ 在点$O(0,0)$处；

（2）$z=\sin(xy)-\cos^2(xy)$ 在点$P_0\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$处；

（3）$z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$在点$P_0(-1,1)$处。

解：（1）根据偏导数定义，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot 0-0}{\Delta x}$$

$$=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0\cdot\Delta y-0}{\Delta y}$$

$$=0.$$

（2）$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{2}}}=\left[y\cos(xy)-2y\cos(xy)\cdot\sin(xy)\right]_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-0$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=\frac{\pi}{2}}}=[x\cdot\cos(xy)-2x\cos(xy)\cdot\sin(xy)]_{\substack{x=0\\y=\frac{\pi}{2}}}$$

$$=0.$$

(3) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\left[-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right]'_x\Bigg|_{\substack{x=-1\\y=1}}$$

$$=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{x^2}\Bigg|_{\substack{x=-1\\y=1}}$$

$$=1.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\frac{1}{y^2}\Bigg|_{\substack{x=-1\\y=1}}$$

$$=1.$$

问：什么是二元函数$z=f(x,y)$的偏导函数？

答：如果函数$z=f(x,y)$在区域D内每一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x或f'_x(x,y).$$

类似地，可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量y的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z'_y或f'_y(x,y).$$

与一元函数导数相同，二元函数$z=f(x,y)$的两个偏导函数与在点$P_0(x_0,y_0)$处的两个偏导数有如下关系：

$$f'_x(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f'_x(x_0,y_0),$$

$$f'_y(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f'_y(x_0,y_0).$$

所以，在求二元函数在点$P_0(x_0, y_0)$处的偏导数时，一般先求函数$z=f(x, y)$的两个偏导函数，然后将$P_0(x_0, y_0)$代入这两个偏导函数，即可求得。

例如，求函数$z=x^y$在点$P_0(2,1)$处的偏导数。

解：∵ $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.y\cdot x^{y-1}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=1,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.x^y\ln x\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=2\cdot\ln 2.$$

就象一元函数的导函数那样，以后在不至于混淆的地方也把偏导函数简称为偏导数。

问：如何理解二元函数偏导数的几何意义？

答：我们先研究二元函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$关于x的偏导数的几何意义，从偏导数定义知道，在二元函数$z=f(x, y)$中固定自变量$y=y_0$时，另一个自变量x仅在直线$y=y_0$上变化，这时，过空间直角坐标系xoy坐标面上的直线$y=y_0$，做垂直于xoy坐标面的平面$y=y_0$，则得到该平面与函数$z=f(x, y)$曲面上的一条相交曲线$z=f(x, y_0)$.参照一元函数导数的几何意义可知，二元函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处关于x的偏导数，就是空间曲线$z=f(x, y_0)$在点$P_0(x_0, y_0)$处切线关于x轴正向夹角的正切值，即空间曲线过空间点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切线M_0Tx对x轴的斜率（如图2—19）。

同理，二元函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处关于y的偏导数的几何意义为：过xoy坐标面上直线$x=x_0$，作与坐标面垂直的平面，该平面与函数$z=f(x, y)$的曲面相交的曲线$z=f(x_0, y)$，函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处关于y的偏导数，就是空间曲线$z=f(x_0, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处切线关于y轴正方向夹角的

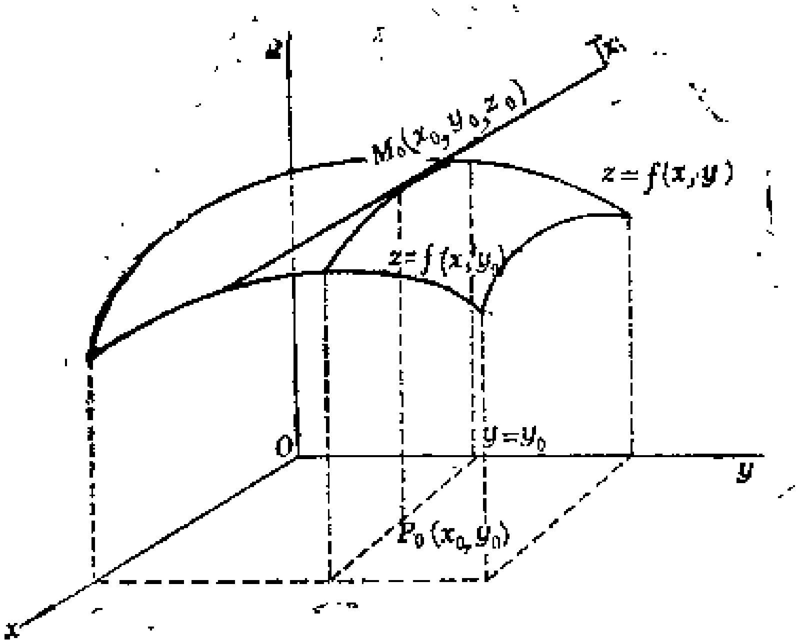


图 2—19

正切值。即空间曲线过空间点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切线M_0Ty对y轴的斜率（如图2—20）。

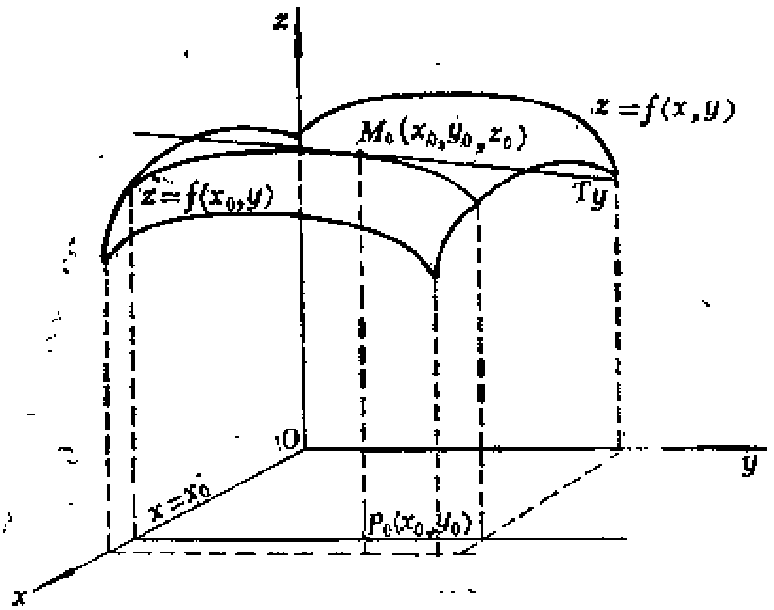


图 2—20

问：曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $M_0(2,4,5)$ 处的切线与x轴正向所

成的倾角是多少？

答： 设曲线过点$M_0(2,4,5)$的切线与x轴正向的倾角为α，则

$$\operatorname{tg}\alpha=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=4}}=\left.\left[\frac{x^2+y^2}{4}\right]'_x\right|_{\substack{x=2\\y=4}}=\left.\frac{x}{2}\right|_{\substack{x=2\\y=4}}=1,$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

问：**在一元函数$y=f(x)$中，若函数在点$x=x_0$处可导，则函数$f(x)$在该点必连续。在二元函数$z=f(x,y)$中，若函数在点$P_0(x_0,y_0)$处的两个偏导数存在，则二元函数在该点必连续吗？为什么？**

答： 不一定。

因为二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的两个偏导数存在，只能在平行于x轴与平行于y轴这两个特殊方向上，保证函数$f(x,y)$连续，而二元函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处的连续性，则要求动点$P(x,y)$以任何方式趋于$P_0(x_0,y_0)$时，极限总存在，且极限值等于该点的函数值。这是二元函数偏导数存在保证不了的。

例如，函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$

在点$(0,0)$处的两个偏导数存在且均为0，但这个函数在该点不连续。

反之，二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处的连续性，也保证不了函数在该点两个偏导数的存在。例如，函数

$$f(x,y)=|x|+|y|$$

在点$(0,0)$处连续，但函数在该点的两个偏导数都不存在。

综上所述，二元函数偏导数的存在与其连续性没有必然的联系，只有二元函数的偏导数存在且连续时，才能保证函数的连续性。

问：三元函数$u=f(x, y, z)$有几个偏导数，如何求三元函数的偏导数？

答： 三元函数$u=f(x, y, z)$有三个偏导数，它们分别是：

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}.$$

在求$\frac{\partial f}{\partial x}$时，将$y$和$z$视为常数，应用一元函数求导法则，仅对$x$求导。

同理，在求$\frac{\partial f}{\partial y}$时，将$x$和$z$视为常数，仅对$y$求导。

在求$\frac{\partial f}{\partial z}$时，将$x$和$y$视为常数，仅对$z$求导。

例如，求函数$u=\ln(1+x+y^2+z^2)$的偏导数。

解：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(1+x+y^2+z^3)'_x}{1+x+y^2+z^3}=\frac{1}{1+x+y^2+z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(1+x+y^2+z^3)'_y}{1+x+y^2+z^3}=\frac{2y}{1+x+y^2+z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(1+x+y^2+z^3)'_z}{1+x+y^2+z^3}=\frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3}.$$

五、全　微　分

问：什么是二元函数的全增量？怎样理解？

答： 设函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$的某个邻域内有定义，并设$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，则称这两点函数值之差：$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$为函数$f(x, y)$在点$P(x,y)$处对于自变量$x$，$y$的增量是$\Delta x$、$\Delta y$的全增量，记为

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y).$$

需要注意的是：

（1）函数$f(x, y)$的全增量要求两个自变量x与y同时取得

增量 Δx与Δy。如果两个自变量仅有一个取得增量，而另一个不变化，则得到的增量是偏增量而不是全增量。

（2）二元函数$f(x, y)$的两个自变量x, y所取的增量Δx与Δy是相互独立的，任意的，因此，点$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$应是$P(x, y)$邻域内的任意一点。

（3）一般来说，二元函数的全增量是关于Δx、Δy的比较复杂的函数。例如，函数$z=(x+y)^2$在平面上任意一点$P(x, y)$的全增量为

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x, y)\\
&=[(x+\Delta x)+(y+\Delta y)]^2-(x+y)^2\\
&=(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)+(y+\Delta y)^2-(x+y)^2\\
&=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2(xy+y\cdot\Delta x+x\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y)\\
&\quad +y^2+2y\cdot\Delta y+(\Delta y)^2-x^2-2xy-y^2\\
&=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+2y\Delta x+2x\Delta y+2\Delta x\Delta y+2y\Delta y\\
&\quad +(\Delta y)^2,
\end{aligned}$$

因此，与一元函数相类似，我们也希望找到一个比较简单的关于Δx、Δy的线性函数去近似地表示函数$f(x, y)$的全增量，这就是二元函数的全微分。

问：什么是二元函数$f(x, y)$的全微分？

答：二元函数$f(x, y)$在点$P(x, y)$的某个邻域内有定义，点$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为该邻域内任意一点，如果函数在点$P(x, y)$的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中A、B不依赖于Δx、Δy，而仅与x、y有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称$z=f(x, y)$在点$(x, y)$可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x, y)$在点$(x, y)$的全微分，记作$dz$，即

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数$f(x, y)$在点(x, y)处可微分，那么函数$z=f(x,y)$在点(x, y)处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，并且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad B=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

从而函数$z=f(x, y)$在点(x, y)的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

习惯上，我们将自变量的增量Δx、Δy分别记作dx、dy，并分别称为自变量x、y的微分．这样，函数$z=f(x, y)$的全微分就可以写为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

我们把$\frac{\partial z}{\partial x}dx$与$\frac{\partial z}{\partial y}dy$分别称为二元函数$f(x, y)$关于$x$与$y$的偏微分，因此，二元函数的全微分为二元函数两个偏微分之和。

问：一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件，那么二元函数是否也是这样？

答： 不是．仅有二元函数$f(x, y)$的两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$存在，并不能保证函数的可微性．也就是说，二元函数偏导数的存在仅是函数可微的必要条件而不是充分条件．例如，函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x=y=0)\end{cases}$$

在点$(0, 0)$存在偏导数，且

$$f'_x(0, 0)=0,\quad f'_y(0, 0)=0.$$

但函数在该点不可微．

事实上，$\Delta z-dz=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，并不是较

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$高阶的无穷小，当动点$P'(\Delta x, \Delta y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，有

$$\frac{\Delta z-dy}{\rho}=\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

即它不能随$\rho\to 0$而趋近于0，这就表明：当$\rho\to 0$时，$\Delta z-dz$并不是一个比ρ较高阶的无穷小，因此，函数在点(0,0)处的全微分不存在，即函数在点(0,0)处是不可微分的。

问：函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 连续，与该点函数可微性的关系如何？

答：函数$f(x, y)$在点$P(x, y)$的偏导数连续，函数必可微分，这是二元函数可微分的充分条件，但它不是必要条件，即由函数$f(x, y)$在一点的可微性，得不到函数偏导数的连续性。

例如，函数

$$f(x, y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

在点(0,0)处，显然有

$$f'_x(0,0)=0，且f'_y(0,0)=0.$$

又 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\Delta y-dy}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{[f(x,y)-f(0\ 0)]-[f_x(0,0)x-f_y(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$=0.$$

所以，函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微。

但函数$f(x,y)$的偏导数在点$(0,0)$处不连续，这是因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y) \text{ 与 } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_y(x,y) \text{ 不存在.}$$

$$\because \quad f'_x(x,y)=2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)'_x$$

$$=2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

又 $2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\to 0\ (x\to 0,\ y\to 0)$，

但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$不存在。这只需令动点$P(x,y)$沿$y=0$趋于$(0,0)$就可看出，因此，函数$f(x,y)$虽在点$O(0,0)$可微，但偏导数不连续。

问：二元函数的偏导数、可微性与连续性之间的关系如何？二元函数的偏导数、偏导数的连续性以及二元函数的可微性、连续性的关系如何？

答：它们的关系可用图2—21表示。

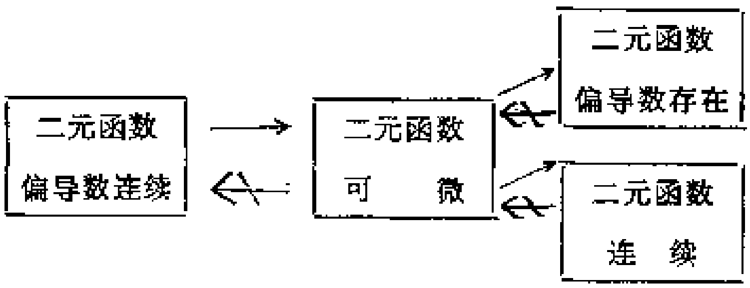


图 2—21

问：如何理解二元函数全微分的几何意义？

答：我们知道，一元函数在一点的微分是函数曲线在该点处切线纵坐标的增量。二元函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$的全微分，是函

数曲面在该点处切平面的立标的增量（对应于自变量的增量是 Δx, Δy），即图2—22中的线段NT. 当ρ很小时，函数的增量NM可用NT近似表示。

问：如何计算函数的全微分？

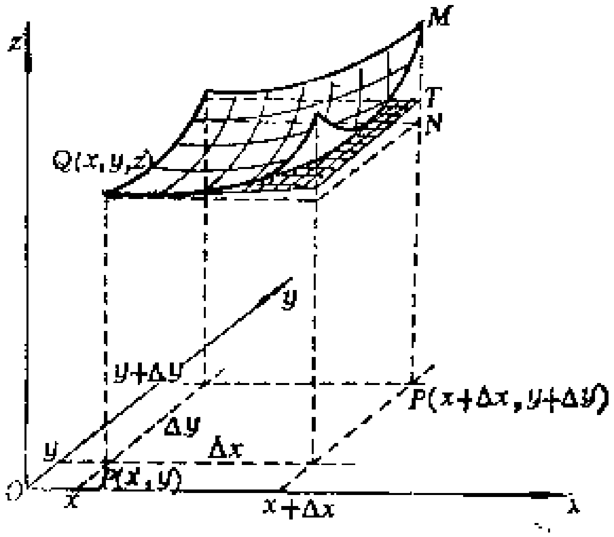


图 2—22

答： 由于二元函数 $f(x, y)$的全微分

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

所以，计算全微分并不需要什么新的方法，只要分别求出函数的偏微分然后相加即可。

例如，求下列函数的全微分：

（1）$z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　（2）$u=x^{yz}$。

解：（1）$\because$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$$\therefore\quad dz=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy.$$

（2）$\because$ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\cdot zx^{yz-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$.

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y\cdot x^{yz}\ln x,$$

$$\therefore\quad du=\left(\frac{y\cdot z}{x}dx+z\ln x dy+y\ln x dz\right)x^{yz}.$$

问：如何利用全微分进行近似计算？

答： 如果函数$f(x, y)$ 在点$P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则函数的全微分 Δz可近似表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)\\ &\approx f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y\\ &= dz,\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) &\approx f(x_0,\ y_0)+f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x\\ &\quad +f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y\\ &= f(x_0,\ y_0)+dz.\end{aligned}$$

因此，我们可以用全微分$dz=f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y$求函数的全增量$\Delta z$与函数终值 $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ 的近似值，而且可以估计误差。

例如，求$\sqrt[3]{(2.02)^2+(1.97)^2}$的近似值。

这是求二元函数终值的近似值。根据所给问题，设函数 $z=f(x,\ y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$，则所求终值为：$f(2.02,\ 1.97)$。然后要"恰当"地选择$x_0$、$\Delta x$和$y_0$、$\Delta y$，所谓"恰当"就是所选择的$x_0$、$y_0$，应使$f(x_0,\ y_0)$、$f'_x(x_0,\ y_0)$、$f'_y(x_0,\ y_0)$ 易于计算，所选择的Δx、Δy，应使其绝对值尽量小。

∵ $2.02=2+0.02,\ 1.97=2+(-0.03)$，

这里可选择$x_0=2$，$\Delta x=0.02$；$y_0=2$，$\Delta y=-0.03$。

解：设$f(x,\ y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$，

∵ $f(2,2)=\sqrt[3]{2^2+2^2}=2$，

又∵ $$\begin{aligned}dz &= f'_x(2,2)\Delta x+f'_y(2,2)\Delta y\\ &= \left[\frac{2x\cdot\Delta x}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}+\frac{2y\cdot\Delta y}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2+y^2)^2}}\right]_{\substack{x=2\\ y=2}}\\ &= \frac{4\cdot 0.02}{3\cdot\sqrt[3]{(2^2+2^2)^2}}+\frac{4\cdot(-0.03)}{3\sqrt[3]{(2^2+2^2)^2}}\\ &\approx -0.00333,\end{aligned}$$

∴ $f(2.02,\ 1.97)\approx 2-0.00333=1.99667$。

再如，求 $z=\dfrac{y}{x}$当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时的全增量与全微分，并估计误差。

解：∵ $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$

$$=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x}$$

$$=\frac{xy+x\Delta y-xy-y\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

则当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时，有

$$\Delta z=\frac{2(-0.2)-0.1}{2(2+0.1)}=-\frac{0.5}{4.2}\approx-0.119.$$

∵ $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$$=\left(-\frac{y}{x^2}\right)\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y,$$

∴ 当$x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$时，有

$$dz=-\frac{1}{4}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.02)=-0.125.$$

∵ $$\frac{|\Delta z-dz|}{|dz|}\approx 5\%,$$

故用dz近似表示Δz的相对误差约为5%。

问：有一两端封闭的圆柱形金属桶，底面半径为5cm，高为18cm，若要将桶外壁涂上一层厚为0.01cm的油漆，问需油漆多少？

分析：设圆柱底面半径为r，高为h，则体积为：

$$V=\pi r^2\cdot h.$$

∵ 油漆厚度为0.01cm，

设$r_0=5$cm，则$\Delta r=0.01$cm。

$h_0=18$cm，则$\Delta h=2\cdot 0.01\text{cm}=0.02$cm。

这样，所要求的是圆柱体体积的增量，即

$$\Delta V=V(r_0+\Delta r,\ h_0+\Delta h)-V(r_0,\ h_0).$$

解：∵ $$dV=\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\Delta h$$

$$=2\pi hr\cdot\Delta r+\pi r^2\cdot\Delta h$$
$$=\pi r(2h\Delta r+r\Delta h),$$

∴ 当$r_0=5$，$h_0=18$，$\Delta r=0.01$，$\Delta h=0.02$时，

$$dV=\pi\cdot5(36+10)\cdot0.01$$
$$\approx7.23(\mathrm{cm}^3),$$

故所需油漆约为7.23(cm³)。

六、多元复合函数的微分法

问：求二元复合函数偏导数的法则是什么？

答：求二元复合函数偏导数的法则是：

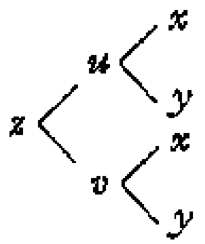
如果函数$u=\varphi(x,\ y)$，$v=\psi(x,\ y)$在点$(x,\ y)$有连续偏导数，函数$z=f(u,\ v)$在对应于$(x,\ y)$的点$(u,\ v)$处有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,\ y),\ \psi(x,\ y)]$在点$(x,\ y)$有对$x$及$y$的连续偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

问：怎样记忆二元复合函数偏导数的求导公式？

答：为了便于记忆二元复合函数偏导数的求导公式，我们将二元复合函数的复合关系表示成如下图式：



这种复合关系图又称为链式图。如果需求$\frac{\partial z}{\partial x}$，则在链式图中先找出自$z$到$x$的所有路线（称为链线），路线有两条：

$$z-u-x\text{ 与 }z-v-x$$

在每一条路线上相邻变量从左到右求导再相乘：

$$\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\text{与}\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

然后把它们相加，就得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同样可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

上述法则称为链式法则。

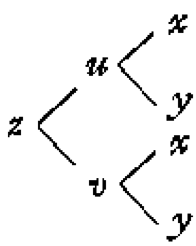
对于中间变量与自变量的其它情形，都可以利用链式图，根据链式法则得到相应的求导公式。

例如，设 $z=e^{xy}\cdot\sin(x+y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：引进中间变量 $u=xy$，$v=x+y$，则

$$z=e^u\cdot\sin v,$$

即 z 是以 u, v 为中间变量，以 x、y 为自变量的复合函数，先画出链式图：



根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=e^u\cdot\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot$$

$$=e^{xy}\cdot[y\cdot\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

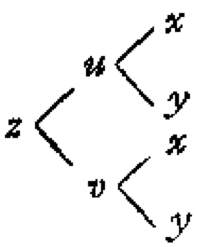
又如，已知 $z=\arcsin(x^2+y^2)+\ln(xy)$，

求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：设$u=x^2+y^2$，$v=xy$，则

$$z=\arcsin u+\ln v,$$

其链式图是



根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=[\arcsin u+\ln v]'_u u'_x+[\arcsin u+\ln v]'_v v'_x$$

$$=[\arcsin u+\ln v]'_u(x^2+y^2)'_x+[\arcsin u+\ln v]'_v\cdot(xy)'_x$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{y}{v}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}+\frac{y}{xy}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}+\frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=[\arcsin u+\ln v]'_u u'_y+[\arcsin u+\ln v]'_v v'_y$$

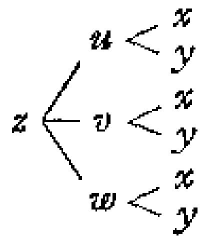
$$=\frac{2y}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{x}{v}$$

$$=\frac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)^2}}+\frac{1}{y}.$$

问：对于中间变量或自变量不只是两个的情形，求二元复合函数偏导数的法则可以推广吗？

答：可以。例如：

设$z=f(u,v,w)$具有连续偏导数，而$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$都具有偏导数，链式图为



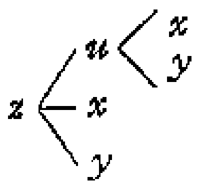
则复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y)]$有对自变量$x$, y的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

又如，只有一个中间变量的情形：

$z=f(u, x, y)$而$u=\varphi(x, y)$，链式图为



则复合函数$z=f[\varphi(x, y), x, y]$有对自变量x及y的偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}.$$

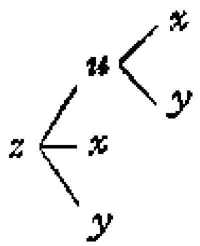
需要注意的是：上面两个式子等号左边的$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$与右边的$\frac{\partial z}{\partial x}$以及$\frac{\partial z}{\partial y}$是不相同的。等号左边的$\frac{\partial z}{\partial x}$是把$f[\varphi(x, y), x, y]$中的$y$看作不变而对$x$的偏导数，等号右边的$\frac{\partial z}{\partial x}$则是把$f(u, x, y)$中的$u$、$y$看作不变而对$x$的偏导数；等号左边的$\frac{\partial z}{\partial y}$与等号右边的$\frac{\partial z}{\partial y}$也有类似的区别。为了不致混淆，常把上面的求导公式写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

例如，设 $z=e^{u^2+x^2+y^2}$，$u=x^2-y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：先画出链式图。



根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$=2u\cdot e^{u^2+x^2+y^2}\cdot 2x+e^{u^2+x^2+y^2}\cdot 2x$$

$$=2x(2u+1)e^{u^2+x^2+y^2}.$$

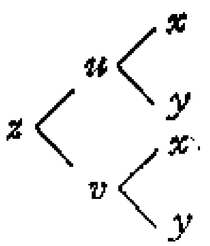
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=2ue^{u^2+x^2+y^2}\cdot(-2y)+e^{u^2+x^2+y^2}\cdot 2y$$

$$=2y(1-2u)e^{u^2+x^2+y^2}.$$

问：若 $z=f\left(\frac{y}{x},xy\right)$ 为可微函数，如何求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$？

答： 令 $z=f(u,v)$，其中 $u=\frac{y}{x}$，$v=xy$。链式图为：



则根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{y}{x}\right)'_x+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot(xy)'_x$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot x.$$

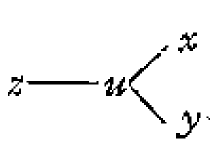
注意：由于题目中函数关系 f 的具体表达式没有给出，所以结果只能写到这里。

问：设可微函数$z=f\left(\frac{y}{x}\right)$，如何证明这个函数必满足偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0?$$

答：我们可以应用多元复合函数求偏导数的法则，求出$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，然后将结果代入方程中予以证明。

设 $z=f(u)$， $u=\frac{y}{x}$，链式图为



则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\because$ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{1}{x}$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\right)$$

$$= 0,$$

$\therefore$ 函数$z=f\left(\frac{y}{x}\right)$满足方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

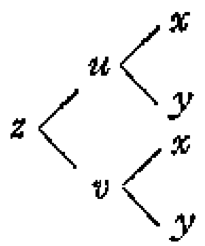
问：设可微函数 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(x, y)$，如何证明等式：

$$x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$$

成立？

答： 设 $z=u+\varphi(v)$，其中 $u=\frac{y^2}{3x}$，$v=xy$，

链式图为：



根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=1\cdot\left(-\frac{y^2}{3x^2}\right)+\varphi'_v(v)\cdot y$$

$$=-\frac{y^2}{3x^2}+y\varphi'_v(v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=1\cdot\frac{2y}{3x}+\varphi'_v(v)x$$

$$=\frac{2y}{3x}+x\varphi'_v(v),$$

$$\therefore \quad x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2$$

$$= x^2\left[-\frac{y^2}{3x^2} + y\varphi'_v(v)\right] - xy\left[\frac{2y}{3x} + x\cdot\varphi'_v(v)\right] + y^2$$

$$= -\frac{y^2}{3} + \varphi'_v(v)x^2y - \frac{2}{3}y^2 - x^2y\varphi'_v(v) + y^2$$

$$= 0 .$$

问：什么是多元函数的全导数？如何计算全导数？

答：设二元函数 $z=f(x, y)$，当x、y仅是 t 的函数：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，链式图为

$$z\left\langle\begin{array}{l} x - t \\ y - t \end{array}\right.$$

则复合函数 $z=f[\varphi(t), \psi(t)]$是关于自变量 t 的一元函数。如果$x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$在 t 点可导，且二元函数 $z=f(x, y)$在对应点可微，则复合函数 $z=f[\varphi(t), \psi(t)]$ 存在关于 t 的导数，我们称之为二元函数的全导数。

根据二元复合函数的链式法则，很容易得到计算全导数的公式：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

例如，求下列各函数的全导数：

（1）$z=\arcsin(x-y)$，其中$x=3t$，$y=4t^3$；

（2）$z=\operatorname{tg}(3t+2x^2-y)$，其中 $x=\frac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$。

解：（1）先画出链式图：

$$z\left\langle\begin{array}{l} x - t \\ y - t \end{array}\right.$$

则 $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\ (3t)'_t+\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}(-4t^3)'_t$$

$$=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$

$$=\frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

（2）设$z=\mathrm{tg}(u+2x^2-y)$，其中$u=3t$，$x=\dfrac{1}{t}$。

$y=\sqrt{t}$，链式图为

$$z\left\langle\begin{array}{l}u-t\\x-t\\y-t\end{array}\right.$$

则 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{\cos^2(u+2x^2-y)}\cdot(3t)'_t+\frac{4x}{\cos^2(u+2x^2-y)}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'_t+\frac{-1}{\cos^2(u+2x^2-y)}\left(\sqrt{t}\right)'_t$$

$$=\frac{1}{\cos^2(u+2x^2-y)}\left[3+\frac{4}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$$

$$=\sec^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right).$$

当z是任意多个变量的函数，而每个变量又都是t的函数时，我们可以将上述公式予以推广，用类似的方法求函数z关于t的全导数．例如，

$z=f(u,v,w)$，其中$u=\varphi(t)$，

$v=\psi(t)$，$w=\omega(t)$。链式图为：

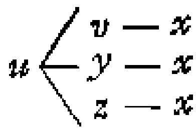
$$z\left\langle\begin{array}{l}u-t\\v-t\\w-t\end{array}\right.$$

则 $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}.$$

下面举个具体例子：

设 $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，其中 $y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{du}{dx}$。

解：令 $u=\dfrac{v(y-z)}{a^2+1}$，其中 $v=e^{ax}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，链式图为



则 $$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{y-z}{a^2+1}(e^{ax})'_x+\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x)'_x+\frac{-e^{ax}}{a^2+1}(\cos x)'_x$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a^2+1)\sin x$$

$$=e^{ax}\cdot\sin x.$$

问：什么是多元函数的微分形式不变性？

答：如果二元函数 $z=f(u,v)$，数 u、v 是自变量时，有全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

当 u、v 不是自变量，而是 x，y 的函数时，即

$$u=\varphi(x,y),\qquad v=\psi(x,y),$$

则 z 关于 x、y 的全微分为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad ①$$

根据复合函数微分法，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad ②$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \qquad ③$$

将②、③代入①，得

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv.$$

由此可知，在二次函数 $z=f(u, v)$ 中，不论 u、v 是自变量还是中间变量，微分式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

总是成立的。我们称多元函数微分的这一性质为多元函数的微分形式不变性。

利用微分形式不变性，证明一些公式或计算导数与微分，常常是比较简便的。

例如，试证：$d(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$，其中$u, v$都是有限个自变量$x, y, \cdots\cdots, z$的函数。

证明：$d(u\cdot v)=\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial u}du+\frac{\partial(u\cdot v)}{\partial v}dv$

$=vdu+udv$

又如，设 $z=\arcsin\frac{x}{y}$，求dz。

本题若先求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，再求$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$比较麻烦，利用微分形式的不变性可简解如下：

$$dz=\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}=\frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)$$

$$= \frac{y dx - x dy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

问：是不是任意一个方程 $F(x, y) = 0$ 都能确定一个隐函数？

答：不一定。例如，方程

$$xy + x^2 - y - 3 = 0,$$

就唯一地确定一个隐函数，且可以将这个隐函数表示成为显式 $y = f(x)$ 的形式，即

$$y = \frac{3 - x^2}{x - 1}.$$

而方程

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

就不确定一个隐函数，这是因为对于任意两个实数 x, y, 都不能使上述方程成立。

应该注意的是：

方程 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数 y 和可以将 y 表示成为显式 $y = f(x)$ 是两码事。完全有这种情况，即方程 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数 y，但这个函数不能用显式表示。例如，方程

$$xy - 2^x + 2^y = 0 \text{ 与 } y - x - \varepsilon \sin y = 0 \ (0 < \varepsilon < 1),$$

都唯一地确定一个隐函数 y，但这个函数不能表示成为显式。

问：如何判断方程 $F(x, y) = 0$ 能够确定隐函数？

答：我们可以根据隐函数的存在定理，判断方程

$$F(x, y) = 0$$

在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域内是否存在隐函数。

隐函数的存在定理是：若

（1）点 $P_0(x_0, y_0)$ 满足方程 $F(x, y) = 0$；

（2）函数 $F(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内存在连续偏导数 $F'_x(x, y)$ 与 $F'_y(x, y)$；

（3）$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$。

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内确定 y 为 x 的一个单值函数 $y = f(x)$，该函数有连续导数 $f'(x)$，且

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}.$$

例如，方程

$$xy-2^x+2^y=0$$

在点（0,0）的某个邻域内就确定一个单值的有连续导数的隐函数。虽然这个隐函数不能表示成为显式，但应用上面的定理就可以证明这个隐函数的存在性。这是因为

（1）$F(0,0)=0$；

（2）$F(x,\ y)=xy-2^x+2^y$在点(0,0) 的某个邻域内有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y-2^x\cdot\ln 2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x+2^y\ln 2;$$

（3）$F'_y(0,0)=\ln 2\neq 0$.

所以可以肯定，方程$F(x,\ y)=0$在点(0,0) 的某个邻域内唯一地确定一个有连续导数的隐函数，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}=-\frac{y-2^x\ln^2}{x+2^y\ln 2}.$$

问：如果方程 $F(x,\ y,\ z)=0$确定隐函数$z=f(x,\ y)$，且存在偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，如何计算这两个偏导数？

答：将方程$F(x,\ y,\ z)=0$所确定的函数 $z=f(x,\ y)$ 代入原方程中，即得恒等式

$$F(x,\ y,\ f(x,\ y))=0.$$

利用复合函数微分法，将上式两端分别求 x 的偏导数，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

当$\frac{xF}{\partial z}\neq 0$时，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

同理可得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

例如，求由方程

$$e^{-xy}-2z+e^{z}=0$$

所确定的函数z关于x、y的偏导数。

解：设$F(x,\ y,\ z)=e^{-xy}-2z+e^{z}$，

$\because\quad F'_x(x,\ y)=-ye^{-xy}$；

$F'_y(x,\ y)=-xe^{-xy}$；

$F'_z(x,\ y)=-2+e^{z}$，

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}.$$

问：若$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，如何证明$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$？

答：可设函数

$$F(x,\ y,\ z)=2\sin(x+2y-3z)-(x+2y-3z),$$

令$u=x+2y-3z$，

则函数变为

$$F(u)=2\sin u-u.$$

$$\because\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},$$

$$\text{又}\because\quad F'_x=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos u-1,$$

$$F'_y=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2(2\cos u-1),$$

$$F'_z=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=-3(2\cos u-1),$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cos u-1}{3(2\cos u-1)}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(2\cos u-1)}{3(2\cos u-1)}=\frac{2}{3},$$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$。

问：如何证明，由方程

$\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$（φ为可微函数）.所定义的函数

$z=z(x,\ y)$满足等式

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c?$$

答： 设$u=cx-az$，$v=cy-bz$，则方程为

$$\varphi(u,v)=0。$$

对该方程的两端求x的偏导数，有

$$\varphi'_u(u,v)\cdot u'_x+\varphi'_v(u,v)\cdot v'_x=0,$$

即 $\varphi'_u(c-az'_x)+\varphi'_u(-bz'_x)=0$

$$\Rightarrow c\varphi'_u=[a\varphi'_u+b\varphi'_v]z'_x,$$

$$\therefore\quad z'_x=\frac{c\varphi'_u}{a\varphi'_u+b\varphi'_v}.$$

同理可得

$$z'_y=\frac{c\varphi'_v}{a\varphi'_u+b\varphi'_v},$$

$$\therefore\quad a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{c\varphi'_u}{a\varphi'_u+b\varphi'_v}+b\frac{c\varphi'_v}{a\varphi'_u+b\varphi'_v}$$

$$=c\cdot\frac{a\varphi'_u+b\varphi'_v}{a\varphi'_u+b\varphi'_v}$$

$$=c.$$

七、空间曲线的切线、法平面和曲面的切平面、法线

问：空间曲线 l 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切线和法平面是如何定义的？

答： 如图 2—23所示，在曲线 l 上的点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 附近找一点 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，则有割线 M_0M'。当动点 M' 沿曲线 l 无限接近点 M_0 时（即 $\Delta x\to0$, $\Delta y\to0$, $\Delta z\to0$ 时），割线 M_0M' 的极限位置 M_0T 就称为曲线 l 在点 M_0 处的切线。

过点 M_0 且与切线 M_0T 垂直的平面 N 称为曲线 l 在点 M_0 处的法平面。

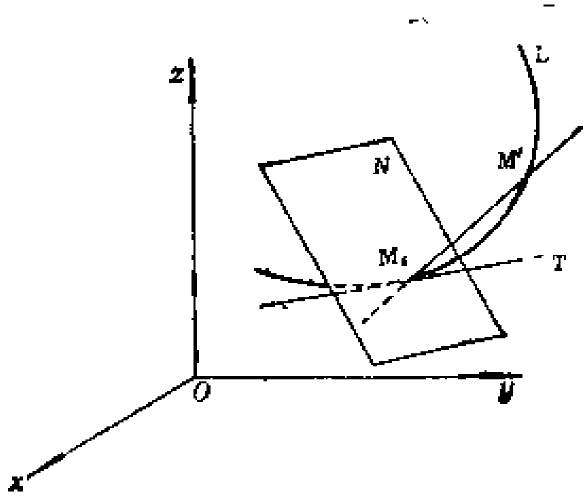


图 2—23

问：若空间曲线 l 的方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),$$

且函数 $\varphi(t)$、$\psi(t)$、$\omega(t)$ 为可导的，如何推导曲线 l 的切线与法平面方程？

答： 根据空间解析几何可知，曲线 l 上割线 M_0M'（如图2—23）的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

（Δx、Δy、Δz 不全为零）。用 Δt 遍除割线 M_0M' 方程的分母，有

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}},$$

∵ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$可导，

∴ 当$\Delta t\to 0$时，$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$，$\Delta z\to 0$。此时M'点沿曲线l无限趋近于点M_0，所以，切线M_0T的方程为

$$\frac{x-x_0}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

即 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

根据空间解析几何可知，过点M_0且与切线M_0T垂直的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

问：如何求下列曲线在指定点的切线与法平面方程？

（1）曲线 $x=\frac{t}{1+t}$，$y=\frac{1+t}{t}$，$z=t^2$在点$t=1$处；

（2）曲线$x=x$，$y=x^2$，$z=\ln x$在点$x=4$处。

答： 首先由$t=t_0$求出x_0、y_0、z_0的函数值，然后再求出上述各函数的导数值，最后利用公式得出曲线在点$t=t_0$处的切线与法平面方程。

解：（1）∵ 当$t_0=1$时，$x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=2$，$z_0=1$，

且$\varphi'(1)=\frac{1}{4}$，$\psi'(1)=-1$，$\omega'(1)=2$，

∴ 曲线在$t=1$处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

即 $$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{8}.$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即　$2x-8y+16z-1=0$。

（2）由于曲线方程的参数为 x，所以对应的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)},$$

∵　$x_0=4$，$y_0=16$，$z_0=\ln 4$，

且　$x'=1$，$\varphi'(4)=8$，$\omega'(4)=\frac{1}{4}$，

∴　过点 $x=4$ 处的切线方程为

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-16}{8}=\frac{z-\ln 4}{\frac{1}{4}},$$

即　$\frac{x-4}{4}=\frac{y-16}{32}=\frac{z-\ln 4}{1}$。

法平面方程为

$$(x-4)+8(y-16)+\frac{1}{4}(z-\ln 4)=0。$$

即　$4x+32y+z-(528+\ln 4)=0$。

问：什么是曲面 S 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面和法线？

答： 如图 2—24所示，如果表示曲面 S 的函数 $z=f(x, y)$ 在点 M_0 处可微，则曲面 S 上在点 M_0 的任意一条曲线 l 的切线都在同一个平面 Q 上，我们称平面 Q 为曲面 S 在点 M_0 的切平面，并称在 M_0 点且与切平面 Q 垂直的直线为曲面 S 在点 M_0 的法线。

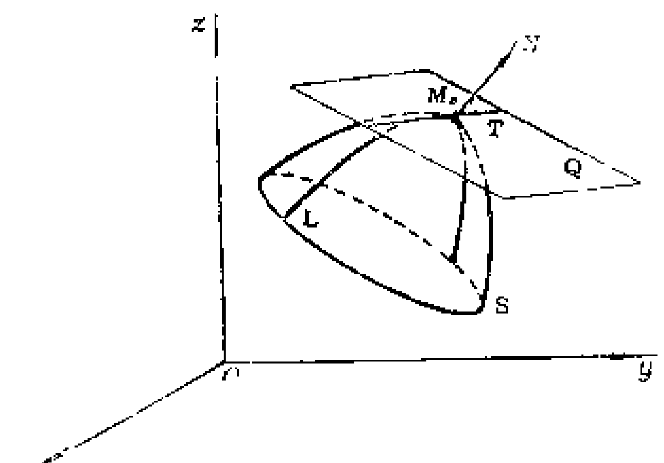


图 2—24

问：如何证明曲面 S 上通过点 M_0 的任何曲线的切线都在同一平面 Q 上？

答：设曲面 S 的方程为

$$F(x, y, z)=0,$$

并设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 S 上的一点，函数 $F(x, y, z)$ 在点 M_0 处有连续且不同时为零的偏导数。在曲面 S 上，过点 M_0 任意引一条曲线 l（图2—24），设曲线方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t).$$

若曲线 l 在点 M_0 处有切线 M_0T，则其方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

因为曲线 l 完全在曲面 S 上，所以有等式

$$F[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]=0$$

成立，且有全导数

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\varphi'(t_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot\psi'(t_0)+$$
$$F'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot\omega'(t_0)=0.$$

根据空间解析几何可知，与切线 M_0T 垂直的直线 M_0N 的方向数为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)、F'_y(x_0, y_0, z_0)\text{和}F'_z(x_0, y_0, z_0).$$

因为曲线 l 是曲面 S 上过点 M_0 的任意一条曲线，所以曲面 S 上过点 M_0 的任何曲线在点 M_0 处的切线都应与 M_0N 垂直，因此，所有过点 M_0 的切线都应在以 M_0N 相垂直的平面 Q 上，且平面 Q 的方程为

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+$$
$$F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0.$$

问：如何求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面及法线方程？

答：设函数 $F(x, y, z)=ax^2+by^2+cz^2-1$，

$\because F'_x(x_0, y_0, z_0)=2ax_0,\quad F'_y(x_0, y_0, z_0)=2by_0,$

$F'_z(x_0, y_0, z_0)=2cz_0,$

则过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面方程为

$$2ax_0(x-x_0)+2by_0(y-y_0)+2cz_0(z-z_0)=0$$

$$\Longrightarrow ax_0x+by_0y+cz_0z-(ax_0^2+by_0^2+cz_0^2)=0,$$

又 $\qquad ax_0^2+by_0^2+cz_0^2=1,$

故所求切平面方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z-1=0.$$

过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{2ax_0}=\frac{y-y_0}{2by_0}=\frac{z-z_0}{2cz_0},$$

即 $\quad \dfrac{x-x_0}{ax_0}=\dfrac{y-y_0}{by_0}=\dfrac{z-z_0}{cz_0}.$

问：若曲面S的方程为$z=f(x, y)$，则过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面与法线方程是什么形式？

答：设函数$F(x, y, z)=f(x, y)-z$，

∵ $\quad F'_x=f'_x(x, y)$，$F'_y=f'_y(x, y)$，$F'_z=-1$，

∴ $\quad$过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面方程为

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

即$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)$。

且过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

例如，求双曲抛物面

$$2z=\frac{y^2}{q^2}-\frac{x^2}{p^2}$$

在坐标原点$O(0,0)$的切平面与法线方程。

解：设 $F(x, y, z)=\dfrac{y^2}{q^2}-\dfrac{x^2}{p^2}-2z,$

∵ $\quad F'_x(0,0,0)=0$，$F'_y(0,0,0)=0$，$F'_z(0,0,0)=-1$，

∴ $\quad$过点$O(0,0,0)$的切平面方程为

$$z=0.$$

过点$O(0,0,0)$的法线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}.$$

问：如何求椭球面：$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面：$x-y+2z=0$的切平面方程？

答：据空间解析几何知，平面 $A_1x+B_1y+c_1z+D_1=0$ 与平面 $A_2x+B_2y+c_2z+D_2=0$ 相互平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

已知平面为：$x-y+2z=0$，

于是可设过椭球面上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与上述平面平行的平面方程为

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

$$\because \quad A_2=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2x_0, \quad B_2=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=4y_0,$$

$$C_2=\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=2z_0,$$

$$\therefore \text{ 有 } \quad \frac{1}{2x_0}=\frac{-1}{4y_0}=\frac{2}{2z_0},$$

即 $$\frac{1}{x_0}=\frac{-1}{2y_0}=\frac{2}{z_0}.$$

由上面的分析求解如下：

设椭球面上点$M_0(x_0, y_0, z_0)$的切平面平行于已知平面，

则 $$\frac{1}{x_0}=\frac{-1}{2y_0}=\frac{2}{z_0},$$

令 $$\frac{1}{x_0}=\frac{-1}{2y_0}=\frac{2}{z_0}=\mu,$$

则有 $\begin{cases}\mu x_0=1\\ 2\mu y_0=-1\\ \mu z_0=2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{\mu},\\ y_0=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mu},\\ z_0=2\cdot\dfrac{1}{\mu}.\end{cases}$

设 $\dfrac{1}{\mu}=r$，则有

$$\begin{cases}x_0=r,\\ y_0=-\dfrac{r}{2},\\ z_0=2r.\end{cases}$$

∵ $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$在椭球面上，即

$$x_0^2+2y_0^2+z_0^2=1,$$

∴ $r^2+2\left(-\dfrac{r}{2}\right)^2+(2r)^2=1$，

解得 $r=\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}}$.

∴ 点 M_0 的坐标为 $M_0\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{11}},\ \mp\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{11}},\ \pm 2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$.

（1）当点 M_0 坐标为$\left(\sqrt{\dfrac{2}{11}},\ -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{11}},2\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)$时，

$$A_2=2\sqrt{\frac{2}{11}},B_2=-2\sqrt{\frac{2}{11}},C_2=4\sqrt{\frac{2}{11}},$$

所以切平面方程为

$$2\sqrt{\frac{2}{11}}\left(x-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-2\sqrt{\frac{2}{11}}\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$$
$$+4\sqrt{\frac{2}{11}}\left(z-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0.$$

即 $\left(x-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0$.

（2）当点 M_0 坐标为 $\left(-\sqrt{\frac{2}{11}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\ -2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ 时，

$$A_2=-2\sqrt{\frac{2}{11}},B_2=2\sqrt{\frac{2}{11}},C_2=-4\sqrt{\frac{2}{11}},$$

所以切平面方程为

$$-\left(x+\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+\left(y-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-2\left(z-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即
$$\left(x+\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y-2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0.$$

问：如何在曲面 $z=xy$ 上求一点，使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$？

答：设过曲面上点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的切平面的法线垂直于已知平面，则切平面必与已知平面平行，于是设过曲面上点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的切平面方程为

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

并设 $F(x,\ y,\ z)=xy-z$,

$$\because\ A_2=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=y_0,\ B_2=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=x_0,\ C_2=\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-1,$$

又，已知平面的方向数为

$$A_1=1,\ B_1=3,\ C_1=1,$$

$$\therefore\ \frac{1}{y_0}=\frac{3}{x_0}=\frac{1}{-1}=-1,$$

则 $x_0=-3$，$y_0=-1$，且求得 $z_0=3$.

故所求的法线方程为

$$\frac{x+3}{-1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-3}{-1},$$

即
$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

问：下面的计算对吗？如果不对，指出错在哪里？求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程。

解： 设椭球面上过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与已知平面平行，其方程为

$$A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0,$$

$$\because \quad A_2=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=2x_0, B_2=\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=4y_0, C_2=\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=2z_0,$$

又，该平面与已知平面平行，

$\therefore \quad 2x_0=1,\ 4y_0=-1,\ 2z_0=2,$

则 $\quad x_0=\frac{1}{2},\ y_0=-\frac{1}{4},\ z_0=1,$

故所求的平面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y+\frac{1}{4}\right)+(z-1)=0.$$

答： 不对。由

$$A_2=2x_0,\ B_2=4y_0,\ C_2=2z_0.$$

直接得出：$2x_0=1$，$4y_0=-1$，$2z_0=2$，并解得 $x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=-\frac{1}{4}$，$z_0=1$。实际上是承认比例数值 $\mu=1$，这是没有任何根据的。在这个问题中，比例数值 $\mu\neq1$，因此，上面的计算是错的。

八、高阶偏导数

问：如何求函数 $z=f(x, y)$ 的高阶偏导数？

答： 设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x, y), \ \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x, y).$$

一般来说，在 D 内 $f'_x(x, y)$、$f'_y(x, y)$ 均是 x、y 的函数。如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x, y)$ 的二阶

偏导数，依照对变量求导的次序不同而有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y).$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数。同样可得三阶、四阶、…以及n阶偏导数。二阶及三阶以上的偏导数称为高阶偏导数。

例如，求函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 的二阶偏导数。

解： $\because$ $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

问：混合偏导数相等的条件是什么？

答： 如果函数$z=f(x,\ y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

在区域D内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

这就是说，二阶混合偏导数在连续的条件下，与求导的次序无关。这样，我们在求函数$z=f(x, y)$的二阶偏导数时，就不必求四个，而仅求三个即可。这里，二阶混合偏导数连续的条件不可缺少。实际上，如果函数在某一区域上的二阶混合偏导数不连续，则两个二阶混合偏导数不一定相等。但由于我们一般研究的都是初等函数，其各阶偏导数在定义域内总是连续的，所以二阶混合偏导数也总是相等的。

例如，求 $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$的二阶偏导数（$-\pi<z<\pi$）.

解： $\because \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

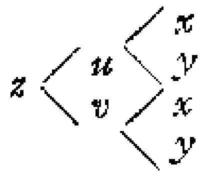
二阶混合偏导数在连续的条件下，与求导的次序无关，这一结论，可以推广到任何阶的混合偏导数。

例如，函数$z=f(x, y)$的三阶混合偏导数连续，则有

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial x \partial z}=\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

问：如果函数 $z=f(xy, x^2-y^2)$ 的二阶偏导数连续，如何求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$？

答： 设$u=xy$, $v=x^2-y^2$，则$z=f(u, v)$，链式图为



根据链式法则，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=y\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$\because$ $\frac{\partial z}{\partial u}$与$\frac{\partial z}{\partial v}$仍为$u$、$v$的函数，

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\cdot\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+0+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial u}+$$

$$+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+0$$

$$=xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2(x^2-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial u}.$$

问：若 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，如何求$\frac{d^2y}{dx^2}$？

答： 首先求出隐函数y关于x的一阶导数，为此，设

$$F(x,y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2,$$

$$\because\quad \frac{\partial F}{\partial x}=2xb^2,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2ya^2,$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2xb^2}{2ya^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

再求隐函数y关于x的二阶导数，即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}\right)$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\left(-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2y^3}$$

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

问：下面的计算对吗？如果不对，请指出错误原因。

已知函数 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：设$F(x, y)=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$，

$\because \quad F'_x=2xb^2$，$F'_y=2ya^2$，

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

设 $\omega(x, y)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$，

$\because \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial x}=-\dfrac{b^2}{a^2 y}, \quad \dfrac{\partial \omega}{\partial y}=\dfrac{b^2 x}{a^2 y^2},$

$$\therefore \quad \frac{d^2 y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial x}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}=\frac{y}{x}.$$

答：解法不对．错在设函数 $\omega(x, y)=\dfrac{dy}{dx}$，而且在求偏导数的过程中，没有把 y 视为 x 的函数，而是将 x、y 同视为 $\omega(x, y)$ 的自变量．

问：设有方程 $x^2+y^2+z^2=1$，如果不解出 $z(z\neq 0)$，如何计算 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}$？

答：我们可将 x、y 视为自变量，将 z 视为 x、y 的隐函数，并对方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 求关于 x、y 的导数，有

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ 和 } 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$=-\frac{z-x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}$$

$$=-\frac{z+x\cdot\dfrac{x}{z}}{z^2}$$

$$=-\frac{z^2+x^2}{z^3}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{-x\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}$$

$$=\frac{x\cdot\left(-\frac{y}{z}\right)}{z^2}$$

$$=-\frac{xy}{z^3}.$$

问：若 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，如何证明拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0?$$

答：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$成为复合函数

$$u=\frac{1}{r},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

$$\because\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

注意到函数 u 关于x、y、z的对称性，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}.$$

$$=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}$$

$$=0.$$

九、多元函数的极值

问：二元函数的极值定义是什么？在学习定义时应注意什么问题？

答：二元函数极值定义是：

设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义，如果函数在点$P_0(x_0,y_0)$处的函数值$f(x_0,y_0)$恒大于（或小于）该邻域内其它各点$P(x,y)$处的函数值$f(x,y)$，即

$$f(x_0,y_0)>f(x,y)\quad(\text{或}f(x_0,y_0)<f(x,y))$$

则称函数值$f(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$的一个极大值(或极小值)，并称点$P_0(x_0,y_0)$为函数$f(x,y)$的极大值点（或极小值点）。

在学习二元函数极值的定义时，应注意以下三点：

（1）正确区别极值点与极值。

（2）二元函数的极值$f(x_0,y_0)$是在点$P_0(x_0,y_0)$的邻域内与其它各点处函数值$f(x,y)$比较而言的。因此，在有界闭区域上连续的二元函数，在这个闭域上完全可能同时取得几个极值，而且极值点可能在闭区域的内部，也可能在区域的边界上。

（3）在空间直角坐标系中，函数$z=f(x,y)$为一个曲面。如果$f(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$的极大值，则在点$P_0(x_0,y_0)$附近必有

$$f(x_0,y_0)>f(x,y)。$$

所以，在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内，点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0)$为曲面的最高点（如图2—25）。

同理，若$f(x_0,y_0)$是函数$f(x,y)$的极小值，则在点$P_0(x_0,y_0)$附近，点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面的最低点（如图2—26）。

问：二元函数极值的必要条件是什么？是怎样证明的？

答：设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微，若函数在该点处取得极值，则必有

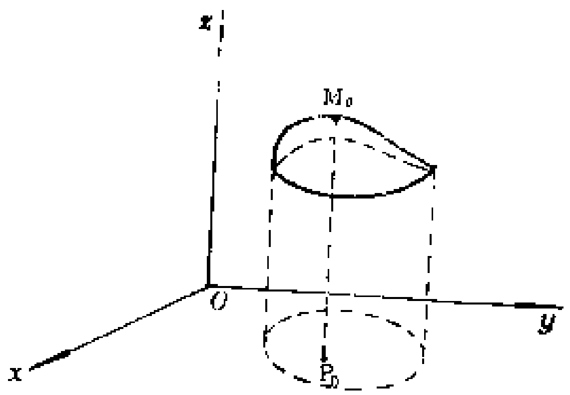


图 2—25

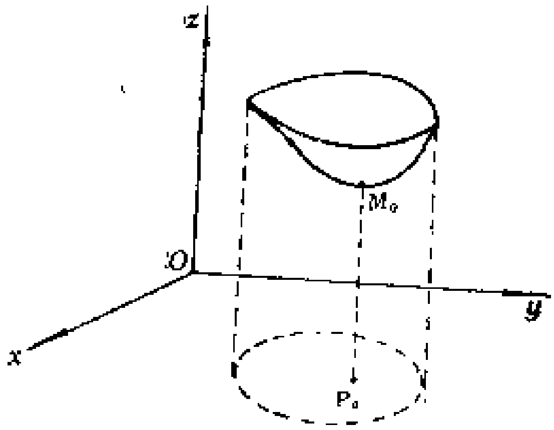


图 2—26

$$f'_x(x_0, y_0)=0,\quad f'_y(x_0, y_0)=0,$$

这就是说，$f'_x(x_0, y_0)=0$，$f'_y(x_0, y_0)=0$，是函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$取得极值的必要条件。

为了证明上述命题，可先将自变量y相对固定，保持定值$y=y_0$，这样，二元函数$z=f(x, y)$变成一元函数$z=f(x, y_0)$。

已知函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$取得极值，则一元函数$z=f(x, y_0)$在点$x=x_0$处必取得极值。

又函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处可微，所以函数在该点处存在两个偏导数。于是，一元函数$z=f(x, y_0)$在点x_0处可导，根据一元函数极值的必要条件，有

$$z'_x=f'_x(x, y_0)\Big|_{x=x_0}=0,$$

即 $f'_x(x_0, y_0)=0$。

同理，固定$x=x_0$，则一元函数$z=f(x_0, y)$在点$y=y_0$处有

$$z'_y=f'_y(x_0, y)\Big|_{y=y_0}=0,$$

即 $f'_y(x_0, y_0)=0$。

问：若函数$z=f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处有

$$f'_x(x_0, y_0)=f'_y(x_0, y_0)=0,$$

则函数在该点处必取得极值吗？

答：不一定。

例如，函数$z=xy$在点（0,0）有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0,$$

但函数在该点不取得极值。

事实上，在点（0,0）处，有$f'(0,0)=0$，但在该点的任意一个邻域内，函数总有正值也有负值，所以，点（0,0）不是极值点。

我们称使函数$z=f(x,y)$的两个一阶偏导数为零的点为函数的驻点。在偏导数存在的条件下，一个点是极值点的必要条件是这个点为驻点。显然，驻点不一定是极值点。

问：二元函数极值的充分条件是什么？

答： 若函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又$f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$。令

$f''_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$,

则$f(x,y)$在（x_0, y_0）处是否取得极值的条件如下：

（1）$B^2-AC<0$时具有极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

（2）$B^2-AC>0$时没有极值；

（3）$B^2-AC=0$时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论。

问：如何应用二元函数极值的充分条件求函数的极值？

答： 应用二元函数极值的充分性求极值的方法为：

（1）若是求极值的应用题，则先将实际问题转化为某个二元函数$z=f(x,y)$的极值问题。

（2）解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$$

求得一切实数解，即可求得一切驻点。

（3）对每个驻点(x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值A、B和C。

（4）定出B^2-AC的符号，然后判定$f(x_0,y_0)$是否是极

值，是极大值还是极小值。

需要说明的是，与一元函数相类似，在实际问题中，如果根据问题的具体条件可以判断函数有极值，且仅有一个驻点，则该驻点必是函数的极值点。

例如，求函数$f(x, y)=e^{2x}\cdot(x+y^2+2y)$ 的极值。

解： $\because\quad f'_x(x, y)=2e^{2x}\cdot(x+y^2+2y)+e^{2x}$

$$=e^{2x}\cdot(2x+2y^2+4y+1),$$

$$f'_y(x, y)=e^{2x}\cdot(2y+2)=2e^{2x}\cdot(y+1).$$

解方程组

$$\begin{cases}f'_x(x, y)=0,\\ f'_y(x, y)=0,\end{cases}$$

求得驻点是$\left(\frac{1}{2},-1\right)$。

$$\because\quad f''_{xx}(x, y)=4e^{2x}(x+y^2+2y)+2e^{2x}+2e^{2x}$$

$$=4e^{2x}(x+y^2+2y+1),$$

$$f''_{xy}(x, y)=2\cdot e^{2x}(2y+2)=4e^{2x}(y+1),$$

$$f''_{yy}(x, y)=2\cdot e^{2x}.$$

则 $A=4e^{2\times\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+(-1)^2+2(-1)+1\right)=2e,$

$B=0,$

$C=2e.$

$\therefore\quad B^2-AC=0-4e^2<0,$

因此，函数在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处取得极值。

因为$A=2e>0$，

所以，函数在点$\left(\frac{1}{2},-1\right)$处取得极小值，且极小值为

$$f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}.$$

问：如何求函数$f(x, y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$的极值？

答： ∵ $f(x, y)=24xy-4x^2y-6xy^2+x^2y^2$.

∴ $f'_x(x,y)=24y-8xy-6y^2+2xy^2$,

$f'_y(x,y)=24x-4x^2-12xy+2x^2y$.

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0 \\ f'_y(x, y)=0 \end{cases} \text{即}$$

$$\begin{cases} 12y-4xy-3y^2+xy^2=0 \\ 12x-2x^2-6xy+x^2y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (3-x)(4y-y^2)=0, \\ (2-y)(6x-x^2)=0. \end{cases}$$

解得驻点为：

$P_1(3,2)$，$P_2(0,0)$，$P_3(4,6)$，$P_4(0,4)$，$P_5(6,4)$，$P_6(6,0)$.

∵ $f''_{xx}(x, y)=-8y+2y^2$,

$f''_{xy}(x, y)=24-8x-12y+4xy$,

$f''_{yy}(x, y)=-12x+2x^2$,

∴ 在点$P_1(3,2)$处，有

$B^2-AC<0$，且$A=-8<0$,

则函数在点$P_1(3,2)$取得极大值：$f(3,2)=36$.

在点$P_2(0,0)$处，有$B^2-AC>0$,

则函数在该点无极值.

在点$P_3(4,6)$处，有$B^2-AC>0$,

则函数在该点无极值.

在点$P_4(0,4)$处，有$B^2-AC>0$,

则函数在该点无极值.

在点$P_5(6,4)$处，有$B^2-AC>0$,

则函数在该点无极值.

在点$P_6(6,0)$处，有$B^2-AC>0$,

则函数在该点无极值.

问：如何求函数$f(x, y)=xy(a-x-y)$的极值？

答： 由于函数 $f(x, y)$ 中含有字母 a，所以在判断函数极值的过程中，应对 a 予以必要的讨论.

$\because \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}=y(a-x-y)-xy=y(a-2x-y)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(a-x-y)-xy=x(a-2y-x)$。

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

得下面四个驻点：

$$P_1(0,0),P_2(0,a),P_3(a,0),\ P_4\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right).$$

$\because \quad f''_{xx}(x,\ y)=-2y$,

$f''_{xy}(x,\ y)=a-2x-2y$,

$f''_{yy}(x,\ y)=-2x$.

则在点$P_1(0,0)$处，有$B^2-AC=a^2$,

（1）当$a\neq 0$时，$B^2-AC>0$，函数在该点无极值。

（2）当$a=0$时，$B^2-AC=0$，不确定。

在点$P_2(0,a)$处，有$B^2-AC=a^2$，讨论同上。

在点$P_3(a,0)$处，有$B^2-AC=a^2$，讨论同上。

在点$P_4\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$处，有 $B^2-AC=\left(-\dfrac{a}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}a^2=-\dfrac{a^2}{3}$,

（1）当$a>0$时，$B^2-AC<0$,且$A<0$,

则函数在点$P_4\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$处取得极大值：$f\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$.

（2）当$a=0$时，$B^2-AC=0$，不确定。

（3）当$a<0$时，$B^2-AC<0$，且$A>0$,

则函数在点$P_4\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$处取得极小值：$f\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$.

问：下面的解法对吗？为什么？

求函数$f(x,\ y)=xy(a-x-y)$的极值。

解：$\because f'_x(x,y)=ay-2xy-y^2$,

$f'_y(x,y)=ax-2xy-x^2$,

解方程组

$$\begin{cases} ay-2xy-y^2=0 & ① \\ ax-2xy-x^2=0 & ② \end{cases}$$

由①－②，得$x^2-y^2-a(x-y)=0$

$\Rightarrow(x+y)(x-y)-a(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-a)=0$.

由$x-y=0$，得$x=y$,

由$x+y-a=0$，得 $x=y=\frac{a}{2}$.

求得驻点$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$.

$\because\quad A=-a,\ B=-\frac{a}{2},\ C=-a$.

$\therefore\quad B^2-AC=-\frac{3}{4}a^2<0$，又$A=-a<0$，

所以函数在点$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$处取得极大值$f\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)=0$.

答：上面的解法不对。

其一，没有求出函数的一切驻点。

其二，解方程组求驻点的方法不对，求出的点$\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)(a\neq0)$不是函数的驻点。

其三，应对字母a进行必要的讨论，不能由$A=-a$和$B^2-AC=-\frac{3}{4}a^2$就判定：$A<0$和$B^2-AC<0$。

问：如果函数$z=f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$处的两个偏导数不存在，则函数在该点必无极值吗？

答：不一定。

例如，函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点(0,0)处的两个偏导数不存在，但函数在该点取得极小值（如图2—27）。

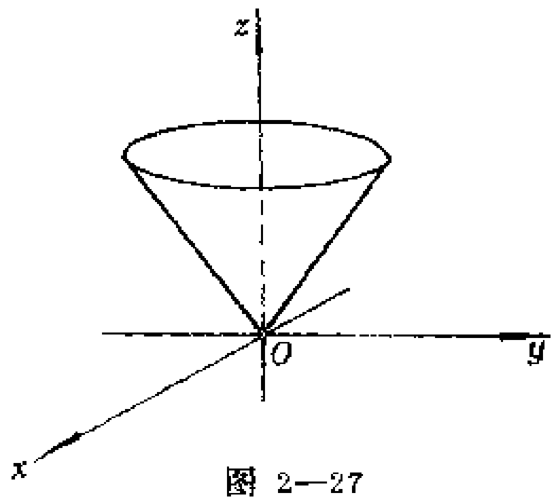


图 2—27

问：在研究二元函数的最大值（或最小值）时，应注意什么问题？

答： 与一元函数相类似，在研究二元函数的最大值（或最小值）时，应注意下面几点：

（1）一般在有界闭域上研究二元连续函数的最大值（或最小值）。

（2）在求二元函数最大值（或最小值）时，应求出函数在闭域内的所有极值（极大值与极小值），并与闭域边界的函数值比较，找出最大或最小的数值。

由于在很多问题中，求函数在边界上的函数值是比较复杂的，所以在计算函数的最大值（或最小值）时，如果根据已知条件的分析，可以肯定函数的最大值（或最小值）不可能在闭域边界上取得，则可以不必与边界的函数值比较。

（3）在求闭域内函数的极值时，应注意哪些使函数的偏导数不存在的点。

（4）求实际问题的最大值（或最小值）时，应首先根据已知条件求出函数的解析式，然后再进行计算。

（5）如果根据实际问题的已知条件可以判断函数的最大值（或最小值）在闭区域内取得，且求得的驻点又是唯一的，则可以根据问题的实际意义直接断定该驻点是函数的最大值（或最小值）点。

问：如何求一个三角形，使其三个顶角的正弦的乘积取得最大值？

答：（1）首先求出函数的解析式

设三角形的三个内角为x, y, $\pi-(x+y)$,

显然有$x>0$, $y>0$, $\pi>x+y$。

根据题意可得函数解析式为：

$$f(x, y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin[\pi-(x+y)]$$
$$=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)。$$

（2）确定函数定义域

根据问题的实际意义，显然这个函数的定义域是以直线$x=0$, $y=0$和$x+y=\pi$围成的三角形闭域内（如图2—28）。

（3）∵ $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y)+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)=\sin y\cdot\sin(2x+y)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin x\cdot\cos y\cdot\sin(x+y)+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos(x+y)=\sin x\cdot\sin(x+2y)$。

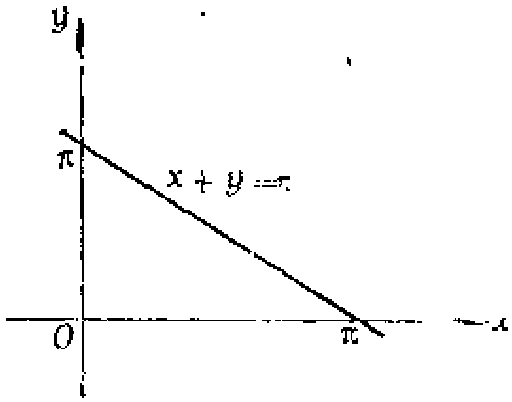


图 2—28

解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0.\end{cases}$$

∵ $\sin x\neq0$, $\sin y\neq0$, 则

$$\begin{cases}\sin(2x+y)=0,\\ \sin(x+2y)=0.\end{cases}$$

解之，得$2x+y=\pi$，且$x+2y=\pi$,

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{3},\\ y=\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

由于函数$f(x, y)$在边界上的函数值为零，而点$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$又是

函数的唯一驻点，所以，可以断定点$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$就是函数的最大值点。因此当三角形为等边三角形时，三个顶角正弦的乘积取得最大值。

问：如何在平面 xoy 上求一点$P(x,y)$，使该点到$x=0$，$y=0$ 和$x+2y=16$这三条直线的距离平方和最小？

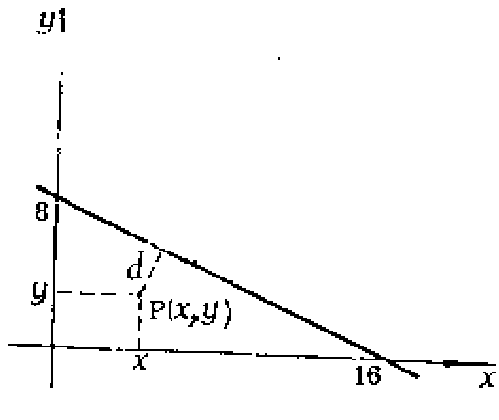


图 2—29

答：（1）首先求出函数的解析式。

设所求点为 $P(x, y)$，

如图 2—29所示，点$P(x, y)$ 到x轴的距离为y，则到y轴的距离为x，到直线$x+2y=16$的距离为

$$d=\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|x+2y-16|}{\sqrt{5}}.$$

则根据题意可得函数为

$$f(x, y)=x^2+y^2+d^2=x^2+y^2+\frac{(x+2y-16)^2}{5}.$$

（2）求驻点。

$$\because \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{12x+4y-32}{5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{18y+4x-64}{5},$$

$$\therefore \quad 令\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0, 解得 x=\frac{8}{5}, \quad y=\frac{16}{5}.$$

得到函数的驻点为$\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$。

由于函数的最小值点显然在三角形有界闭域内取得(如图2—29)，且求得的驻点又是唯一的，所以点$\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$即为所求。

问：什么是条件极值和无条件极值？

答：在研究多元函数的极值时，常遇到两类不同的问题。一类是

上面讨论的函数极值，对于这类问题，我们除了要求函数的自变量应限制在定义域内，没有其它限制。另一类则要求函数的自变量除了受定义域的条件限制外，还要受另外一些条件的限制。例如，

（1）求函数$z=xy$在适合条件$x+y=1$下的极大值。

（2）求表面积为a^2的长方体体积的最大值。

这种带附加条件的极值问题称为"条件极值"问题，把前面那种不带附加条件的极值问题称为"无条件极值"问题。

问：如何解条件极值问题？

答：（1）从理论上讲，条件极值可以转化为无条件极值，然后利用前面所学的方法求解。

例如，求函数$z=xy$在适合条件$x+y=1$下的极大值。

解：由条件$x+y=1$可得$y=1-x$，

则 $z=xy=x(1-x)=x-x^2$，

$\because$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=1-2x$，

$\therefore$ 令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$，

求得唯一驻点$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$。

$\because$ $A=-2$，$B=1$，$C=-2$，

则 $B^2-AC=-3<0$。

所以函数在点$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$处取得极大值$f\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。

又如，求表面积为a^2的长方体体积的最大值。

解：设长方体的长、宽、高分别为x、y、z，则所求问题为：在条件$2xy+2yz+2xz=a^2$限制下，求函数$V=xyz$的最大值。

由条件$2xy+2xz+2yz=a^2$，可得

$$z=\frac{a^2-2xy}{2x+2y},$$

于是可将问题转化为无条件极值问题，即求

$$V=xy\frac{a^2-2xy}{2x+2y}$$

的极大值问题。

令 $\frac{\partial V}{\partial x}=0,\frac{\partial V}{\partial y}=0$,解得 $x=\frac{a}{\sqrt{b}}$, $y=\frac{a}{\sqrt{b}}$, 求得函数的唯一驻点$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}\right)$。

由于函数的最大值肯定存在，所以点$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}\right)$就是函数的最大值点，且函数的最大值为：

$$V\left(\frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a}{\sqrt{b}}\right)=\frac{a^3}{\sqrt{b^3}}.$$

（2）在一般的问题中，将条件极值转化为无条件极值求解是困难的，有时甚至是不可能的。因此，常用一种特殊方法求解多元函数的条件极值问题，这种方法称为拉格朗日乘数法。

为了求函数$f(x, y)$在条件 $\varphi(x, y)=0$ 的限制下的极值，可用常数λ乘$\varphi(x, y)$，然后与 $f(x, y)$ 相加，得到一个新的函数

$$F(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y),$$

我们称这个函数为拉格朗日函数。

根据函数$F(x, y)$求无条件极值的方法，有

$$\begin{cases}F'_x(x, y)=f'_x(x, y)+\lambda\varphi'_x(x, y)=0,\\ F'_y(x, y)=f'_y(x, y)+\lambda\varphi'_y(x, y)=0.\end{cases}$$

然后将方程组与方程$\varphi(x, y)=0$联立，得

$$\begin{cases}F'_x(x, y)=0,\\ F'_y(x, y)=0,\\ \varphi(x, y)=0.\end{cases}$$

解这个方程组，求出x、y，则点$P(x, y)$ 就可能是符合条件$\varphi(x, y)=0$的函数 $f(x, y)$的极值点，我们可根据实际问题的意义进一步判断并求出极值。

例如，利用拉格朗日乘数法求函数 $z=xy$ 在条件 $x+y=1$下

的极大值。

解：首先求出拉格朗日函数：

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\varphi(x,\ y)$$
$$=xy+\lambda(x+y-1),$$

∵ $F'_x(x,\ y)=y+\lambda,\ F'_y(x,\ y)=x+\lambda,$

所以得到方程组

$$\begin{cases}F'_x(x,\ y)=y+\lambda=0,\\F'_y(x,\ y)=x+\lambda=0,\\\varphi(x,\ y)=x+y-1=0.\end{cases}$$

解得 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$。

由于函数肯定有极大值，且点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 是唯一的，所以，函数在点$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$处取得符合条件：$x+y=1$ 的极大值：$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$。

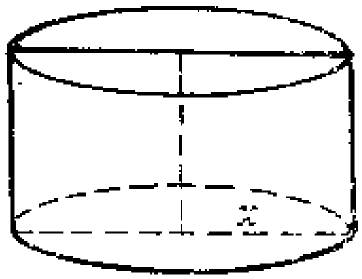


图 2—30

问：将周长为 2p 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，矩形的边长各为多少时，可使圆柱体的体积最大？

答：我们用拉格朗日乘数法进行计算。如图2—30所示。

设矩形长为y，宽为x，则圆柱体体积为

$$V(x,\ y)=\pi x^2y$$

据题意得函数的附加条件为：$2x+2y=2p$，即

$$x+y-p=0.$$

∴ 拉格朗日函数为

$$F(x,\ y)=\pi x^2y+\lambda(x+y-p)$$

∵ $F'_x(x,\ y)=2\pi xy+\lambda,\ F'_y(x,\ y)=\pi x^2+\lambda,$

得方程组

$$\begin{cases} F'_x(x, y) = 2\pi xy + \lambda = 0 \\ F'_y(x, y) = \pi x^2 + \lambda = 0 \\ x + y - p = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi xy = -\lambda \\ \pi x^2 = -\lambda \\ x + y - p = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x + y - p = 0 \end{cases}$$

解得 $x = \frac{2}{3}p$，$y = \frac{1}{3}p$.

由于所求的最大值必存在，且点$\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{p}{3}\right)$唯一，所以，当矩形长为$\frac{p}{3}$，宽为$\frac{2}{3}p$时，以长为轴进行旋转的旋转体的体积最大.

问：如何在平面 $3x-2z=0$ 上求一点，使它到点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,3,4)$ 的距离平方之和为最小？

答： 设所求点为$M(x, y, z)$，则根据题意得到函数为

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= [\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}]^2 \\ &\quad + [\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}]^2 \\ &= (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2 \\ &\quad + (y-3)^2+(z-4)^2, \end{aligned}$$

附加条件为：$3x-2z=0$.

所以，拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2 \\ &\quad + (y-3)^2+(z-4)^2+\lambda(3x-2z). \end{aligned}$$

$\because$ $F'_x(x, y, z) = 2(x-1)+2(x-2)+3\lambda$,

$F'_y(x, y, z) = 2(y-1)+2(y-3)$,

$F'_z(x, y, z) = 2(z-1)+2(z-4)-2\lambda$,

得到方程组

$$\begin{cases}F'_x(x,\ y,\ z)=2(x-1)+2(x-2)+3\lambda=0\\ F'_y(x,\ y,\ z)=2(y-1)+2(y-3)=0\\ F'_z(x,\ y,\ z)=2(z-1)+2(z-4)-2\lambda=0\\ 3x-2z=0\end{cases}$$

解得　$x=\frac{21}{13},\ y=2, z=\frac{63}{26}$.

由于所求的最小值存在，且求得的唯一驻点$\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$在平面 $2x-2z=0$上，所以点$\left(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26}\right)$即为所求。

问：抛物面 $z=x^2+y^2$被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，如何求原点$O(0,0,0)$到椭圆的最长与最短距离？

答： 如图2—31所示，设原点 $O(0,0,0)$ 到椭圆上任意一点$M(x, y, z)$的距离为 d，

$$d(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

现在要求函数$d(x,\ y,\ z)$的最大值与最小值。

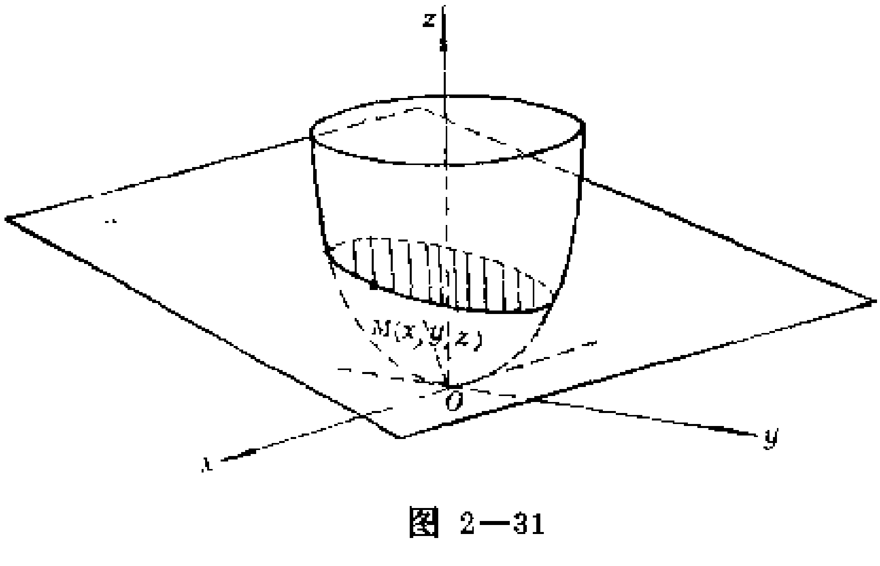


图 2—31

根据题意可知，点$M(x,\ y,\ z)$既在抛物面$z=x^2+y^2$ 上，又在平面$x+y+z=1$上，所以，我们得到函数 d 的两个附加条件：

$$\varphi_1(x,\ y,\ z)=z-x^2-y^2=0,$$

$$\varphi_2(x,\ y,\ z)=x+y+z-1=0.$$

这样拉格朗日函数为

$$F(x,\ y,\ z)=d(x,\ y,\ z)+\lambda_1\varphi_1(x,\ y,\ z)+\lambda_2\varphi_2(x,\ y,\ z)$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1).$$

所以得到方程组

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-2\lambda_1 x+\lambda_2=0 & ① \\ F'_y(x,y,z)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-2\lambda_1 y+\lambda_2=0 & ② \\ F'_z(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\lambda_1+\lambda_2=0 & ③ \\ z-x^2-y^2=0 & ④ \\ x+y+z-1=0 & ⑤ \end{cases}$$

由①－②，得

$$\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-2\lambda_1(x-y)=0$$

$$\Rightarrow (x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-2\lambda_1\right)=0,$$

解得

$$x=y \quad 或 \quad \lambda_1=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

将 $y=x$ 代入④、⑤，得

$$\begin{cases} z-2x^2=0 & ⑥ \\ z=1-2x & ⑦ \end{cases}$$

将⑦代入⑥，得

$$x^2+x-\frac{1}{2}=0,$$

解得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore \quad x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $z=2-\sqrt{3}$;

或 $\quad x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $z=2+\sqrt{3}$.

由于原点到椭圆距离的最大值与最小值肯定存在，所以，将上面求得的点$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right)$和$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$代入距离函数，得到

$$\min d(x,y,z)=\sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2-\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{9-5\sqrt{3}},$$

$$\max d(x,y,z)=\sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2+\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{9+5\sqrt{3}}.$$

十、小　　结

在这一章里，我们学习了以二元函数为主的多元函数微分法及其应用，综合起来，读者应明确以下几点：

1．二元函数的定义域一般是一个平面区域，常用联立不等式表示。

2．学习二元函数的变化率，是在让其中一个自变量保持不变，而只是让另一个自变量变化的情况下进行的。在这个基础上产生了偏导数的概念。偏导数是全章最基本的概念，它是学习其它内容的基础。在学习偏导数概念时，读者可与一元函数的相应概念对照进行小结。

3．多元函数微分法重点是复合函数的求导，因为多元函数的高阶导数、隐函数求导均可以归结为复合函数求导。本章中我们特别强调了利用链式图求复合函数的导数，这是读者应该掌握的。

4．多元函数微分法的应用主要包括下面三个方面：

（1）几何应用：求切平面、法线、切线和法平面的方程。

（2）近似计算：应用全微分进行近似计算及其误差估计。

（3）多元函数的极值：无条件极值和条件极值的计算。

读者可系统总结出上述问题的公式和典型问题的解决方法。

十一、思考练习题

1．求下列各函数的定义域，并画出图形：

（1）$z=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$；　　（2）$z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$；

（3）$z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$；　　（4）$z=x+\sqrt{y}$；

（5）$z=y+\ln x$；　　（6）$z=\ln(xy)$。

2．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+xy+y^2)$；　　（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)\cdot e^{-(x+y)}$。

3．求下列各函数的偏导数：

（1）$z=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$；　　（2）$z=x\cdot\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$；

（3）$z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；　　（4）$z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$；

（5）$z=e^{-\frac{x}{y}}$。

4．求函数$z=e^{xy}$的二阶偏导数。

5．已知$u=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，试验证：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$．

6．求下列函数的全微分：

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;　　　　(2) $z=\frac{xy}{x+y}$;

(3) $z=\frac{y}{e^x}$;　　　　(4) $u=x^{yz}$。

7．已知$u=\ln(e^x+e^y)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，若$y=x^3$，$\frac{\partial u}{\partial x}=?$

8．设$z=f(u, y)$，$u=\varphi(y)$，求$\frac{\partial z}{\partial y}$。

9．设$x=u+v$，$y=u-v$，$z=u^2\cdot v^2$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$dz$。

10．求函数$u=3axy-x^3-y^3$的极值（$a>0$）。

11．在xoy平面上找一点，使它到$A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$三点距离的平方和最小。

12．实验室要做一个容积为V的无盖长方盒，问应怎样选取长、宽、高，才能使所用的材料最省？

十二、思考练习题答案或提示

1．(1) $x^2+y^2\geqslant a^2$，图形是圆周$x^2+y^2=a^2$的外部区域（含圆周）。

(2) $x^2+y^2\neq 0$，图形是整个xoy坐标面，但除去原点。

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$，图形是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的内部闭区域。

(4) $y\geqslant 0$，图形是xoz坐标面的上半平面。

(5) $x>0$，图形是xoz坐标面的右半平面。

(6) $\begin{cases} x>0, \\ y>0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x<0, \\ y<0. \end{cases}$

2．(1) 7；　　　(2) 1；　　　(3) 0。

3．(1) $z'_x=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$，$z'_y=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}$。

(2) $z'_x=\sqrt{y}-\dfrac{y}{3x\sqrt[3]{x}}$, $z'_y=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

(3) $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

(4) $z'_x=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(5) $z'_x=-\dfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$, $z'_y=\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$.

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}=(xy+1)e^{xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}$.

5. 略。

6. (1) $dz=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (2) $dz=\dfrac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}$,

(3) $dz=e^{\frac{y}{x}}\left(-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy\right)$,

(4) $du=x^{y-1}(yzdx+xz\ln xdy+xy\ln xdz)$.

7. (1) $\dfrac{e^x}{e^x+e^y}$, (2) $\dfrac{e^x+3x^2\cdot e^{x^3}}{e^x+e^{x^3}}$.

8. $\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9. $dz=\sqrt{z}\,(xdx-ydy)$.

10. 在点 (a,a) 处有极大值，极大值为 $u_{(a,a)}=a^3$.

11. $P\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

12. 当盒底为边长 $\sqrt[3]{2V}$ 的正方形时，材料最省。

第三章　重　积　分

本章将在定积分的基础上，重点研究二元函数、三元函数的积分问题，即重积分的问题。重积分是定积分的直接推广，两者之间存在着密切的联系，所以在学习重积分时，应注意与定积分有关问题的分析与比较，分清它们的联系与区别，掌握重积分特点和解决重积分问题的方法。

学习本章的要求：

1．掌握重积分的概念；理解二、三重积分的定义、主要性质及二重积分的几何意义。

2．熟练掌握在直角坐标系下，二重积分的计算方法；对特殊区域会用极坐标系去计算积分。

3．掌握直角坐标系下三重积分的计算方法；对于几种特殊区域的三重积分要会用柱坐标和球坐标系下的公式进行计算。

4．理解“微元法”的思想，会用重积分解决几何上和物理上的某些简单的应用问题。

本章的重点是：重积分的定义和二重积分的计算以及重积分的简单物理应用。

一、二重积分的概念

问：重积分与定积分的联系和区别是什么？

答： 重积分与定积分的联系为：

（1）在概念上，重积分与定积分都是某种和式的极限，两者都是通过“分割”、“求和”、“取极限”得到的。

（2）在计算上，重积分是通过“累次积分法”转化为定积分完成的。

（3）在性质上，重积分与定积分具有类似的性质。

重积分与定积分的区别为：

（1）研究对象不同，定积分仅研究一元函数，而重积分则研究多元函数。

（2）研究的区域不同。定积分仅在一维直线区域上研究，而重积分则在多维空间上研究。

问：二重积分是如何定义的？

答： 二重积分与一元函数的定积分类似，在本质上也是某种和式的极限，我们采用类似于一元函数的定积分问题中处理曲边梯形面积的方法来研究以平面区域D为底，以曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体（图3—1）的体积计算问题。

1．分割：把平面闭区域D任意分成几个小平面区域 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$（如图3—1）。

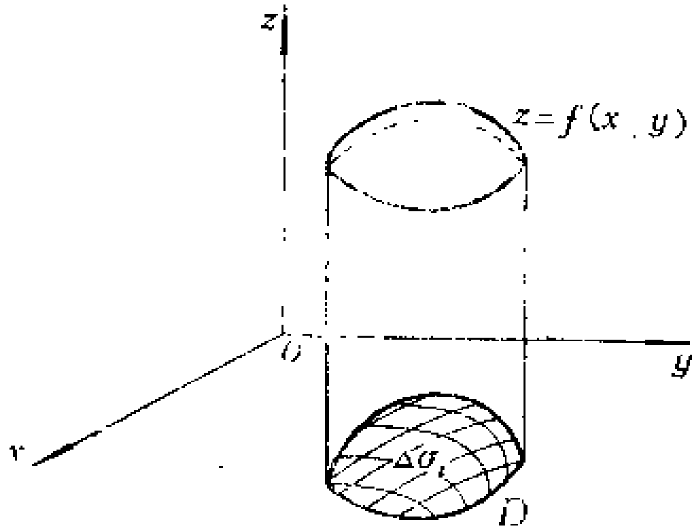


图 3—1

2．取点求积：在 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 上，任取一点$P_i(x_i, y_i)$，用$P_i(x_i, y_i)$ 点的函数值$f(x_i, y_i)$ 与$\Delta\sigma_i$的面积相乘（这里仍用$\Delta\sigma_i$表示面积），即

$$f(x_i, y_i)\cdot\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

我们应注意：$P_i(x_i, y_i)$可以是$\Delta\sigma_i$的边界点或内点；从几何意义看，$f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$表示了以$\Delta\sigma_i$为底、以 $f(x_i, y_i)$ 为高的平

顶柱体体积。我们用它近似代替与之对应的第 i 个小曲顶柱体的体积（图 3 — 2）。

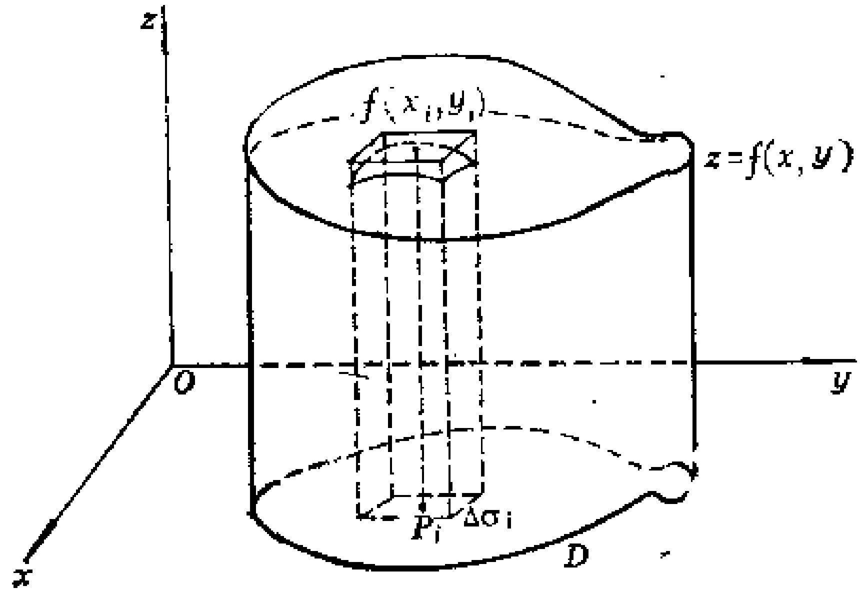


图 3—2

3．求和：将各 $f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 相加 $(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \cdots$$

$$+ f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n.$$

应该注意，这个和式的值与函数 $f(x, y)$、区域 D、分法和 P^i (x_i,y_i) 的取法都有关。从几何意义看，是将 n 个小平顶柱体的体积相加，将这个和数做为整个曲顶柱体体积的近似值。

4．取极限：当 n 无限增大，且各个小区域 $\Delta\sigma_i$（$i=1,2,\cdots,$ n）中的最大直径 d 趋于零（$\max\{di\}\to 0$）时，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,$ $y_i)\Delta\sigma_i$ 的极限存在，即

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ d\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i,$$

则称极限 I 为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分，并称函数

$f(x, y)$ 在区域D上可积分，记为

$$I=\iint_D f(x, y)d\sigma.$$

其中，$f(x, y)$ 为被积函数，x、y 为积分变量，D 为积分区域，$d\sigma$为面积元素。

这里我们所说的"各小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最大直径 d"，是指各小区域$\Delta\sigma_i$上任意两点距离的最大值$d_1, d_2, \cdots, d_n$中的最大者. 当$d\to0$时，明显可以看出，上面各小区域$\Delta\sigma_i(i=1, 2,\cdots,n)$ 从各方面无限缩小，这样，当 $d\to0$时，极限值I就表示了整个曲顶柱体的体积。

应该指出的是，极限值I仅与函数$f(x, y)$和区域D有关，而与分法、$P_i(x_i, y_i)$ 点的取法以及积分变量的记号无关。当极限值I存在时，由于它与分法和 $P_i(x_i, y_i)$ 点的取法无关，所以，我们就可以用平行于两个坐标轴且等距的直线去分割区域 D（如图 3 — 3）。这样，就得到两类小区域：一类完全在区域D内，形状为大小相同的小矩形，面积为 $\Delta\sigma=\Delta x\cdot\Delta y$（图 3 — 3）；另一类位于区域$D$的边界处，其形状为小矩形的碎片，当取极限时，面积总和趋于零。因此，我们只需考虑前一

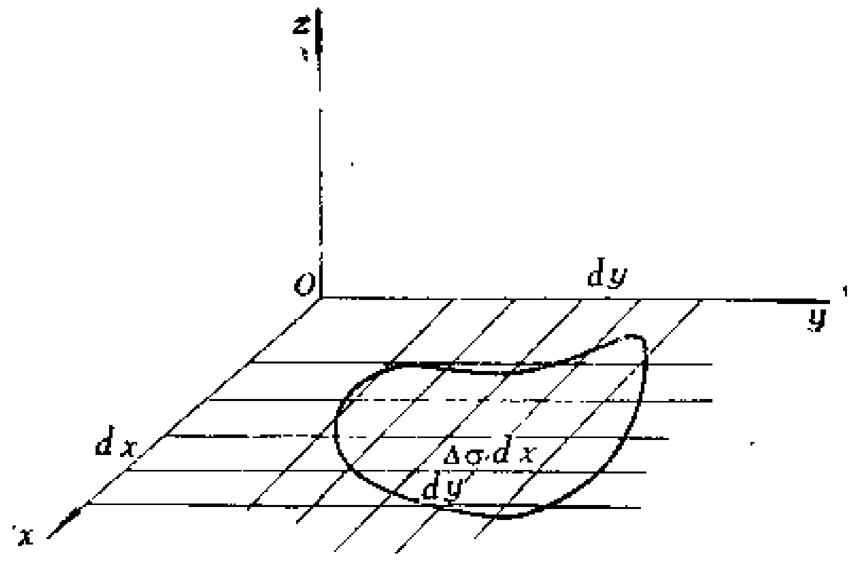


图 3—3

类的矩形小区域$\Delta\sigma$。

由于$\Delta\sigma=\Delta x\cdot\Delta y$，且$d\sigma=dx\cdot dy$，所以，二重积分可表示为

$$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

问：在二重积分的定义中，极限过程为什么用“各小区域$\Delta\sigma_i$的最大直径$d\to0$”，而不用“各小区域$\Delta\sigma_i$的面积最大者趋于零”呢？

答：因为，$d\to0$指出了各小区域从各方面无限缩小为一点。从几何意义上可以保证各小平顶柱体体积之和无限接近于曲顶柱体的体积。但仅有$\Delta\sigma_i$的面积趋于零，则不能充分保证$\Delta\sigma_i$从各个方面无限缩小为一点，它可能缩成一条线，虽然面积趋于零，但各小平顶柱体体积之和不能无限接近曲顶柱体的体积。

问：什么样的二元函数$f(x,y)$在闭区域D上是可积的函数？

答：一般地，如果二元函数$f(x,y)$在闭域D上连续，则$f(x,y)$在D上可积。今后我们将重点研究这类函数。

应该注意的是：如果函数$f(x,y)$在闭域D上除去有限条线及有限个点外连续，而且函数在D上有界，则$f(x,y)$在D上也是可积的。

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq0),\\ 0 & (x^2+y^2=0).\end{cases}$$

在点O（0，0）处不连续，但在任一包含原点的闭区域D上有界，故$f(x,y)$在任一包含原点O（0，0）的闭域D上可积。

二、二重积分的“累次积分法”

问：什么是二重积分的“累次积分法”？

答：如果二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$的积分区域$D$可以表示为

$$\begin{cases} y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x) \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y) \\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$$

（如图 3 — 4 、 3 — 5 ）.

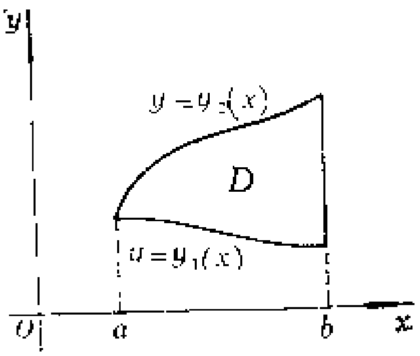


图 3—4

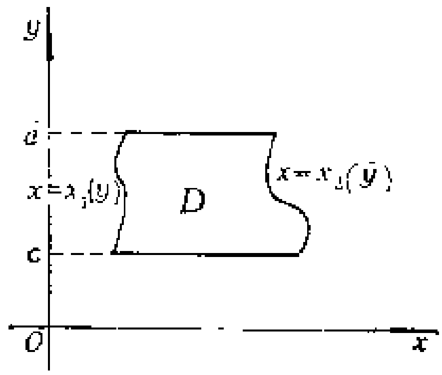


图 3—5

则二重积分 I 可转化为二次积分的形式：

$$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \quad ①$$

或 $$I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \quad ②$$

在计算①式时，应先计算关于 y 的积分：

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$,这时$y$为积分变量，$x$为参数. 显然，结果为关于$x$的函数$A(x)$，此时，二重积分变为

$$I = \int_a^b A(x)dx.$$

这是关于x的定积分，计算这个定积分就得到二重积分的值 I .

同理，在计算②式时，应先做计算关于x的积分：

$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$. 这时$x$为积分变量，$y$为参数，其积分结果是关于$y$的函数$B(y)$，此时，二重积分变为

$$I = \int_c^d B(y)dy.$$

这是关于 y 的定积分，其积分值就是二重积分的值 I 。

综上所述，我们将二重积分转化为二次定积分的计算方法称为“累次积分法”。

问：当 $f(x, y) \geq 0$ 时，如何根据二重积分的几何意义推导出二重积分的“累次积分法”？

答： 根据二重积分的几何意义，二重积分

$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ 的值等于以区域 D 为底、以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积，这里不妨设区域 D 为

$$\begin{cases} \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \\ a \leq x \leq b. \end{cases}$$

为了推出二重积分的累次积分公式，我们用“切片法”求曲顶柱体的体积（图 3 －6）。

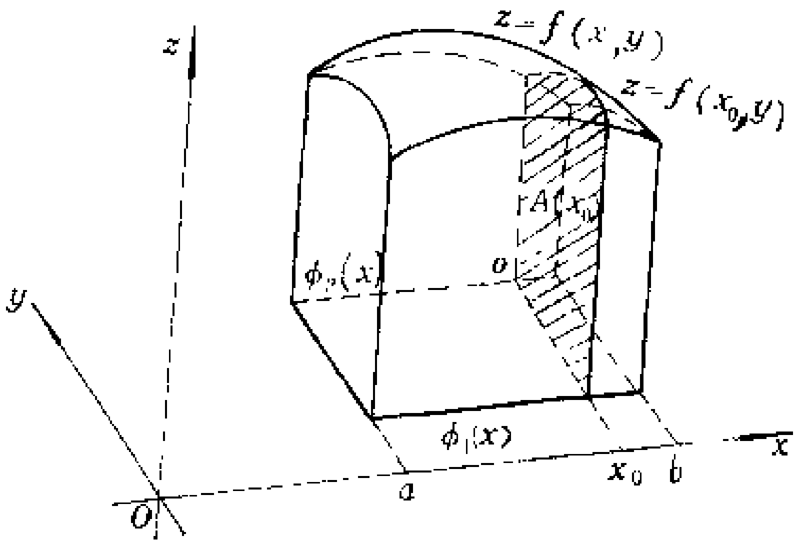


图 3—6

作与 yoz 坐标面平行的平面 $x = x_0$，这平面与曲顶柱体相交的截面 $A(x_0)$，是一个以区间 $(\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0))$ 为底，以空间曲线 $z = f(x_0, y)$ 为曲边的曲边梯形．根据定积分可知，该曲边梯形的面积为

$$A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)dy.$$

一般地，过区间$[a, b]$上任意一点x且平行于 yoz坐标面的平面，与曲顶柱体相交所得的截面面积为

$$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

其中，y为积分变量，x在该定积分中为参量，保持不变。这样，对于区间$[a, b]$上的每一点x，都对应一个面积为$A(x)$的曲边梯形，我们把这些截面（小切片）加起来，便是曲顶柱体的体积，根据定积分意义，有

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right]dx$$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

这样，就得到了二重积分的累次积分式：

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

同理，若用与 xoz 坐标面平行的平面去切曲顶柱体，应用上面的方法就可以推出二重积分的第二个计算公式：

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx.$$

问：应用“累次积分法”计算二重积分的步骤和应注意的问题是什么？

答：应用“累次积分法”计算二重积分的步骤为：

（1）确定积分区域D（用不等式组表示）；

（2）根据区域D的特点，选择“累次积分”公式；

（3）确定积分限；

（4）应用“累次积分”公式进行计算。

在应用"累次积分法"计算二重积分时，应注意的问题是：

要根据区域D的特点，合理选择积分顺序，如果区域很方便地表示为

$$D:\quad \begin{cases}\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\\ a\leqslant x\leqslant b\end{cases}$$

时，则应先对y积分后再对x积分，此时，应选用公式①.

如果区域D很方便地表示为

$$D:\quad \begin{cases}\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$$

时，应先对x积分后再对y积分。此时，应选用公式②。

确定积分次序，有时还需考虑到有利于找出原函数。

在计算二重积分时，选择不同的公式，积分限也不同。对初学者来说，确定积分限常常是比较困难的，也是最容易出错误的。

例如，计算二重积分：$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dx\,dy$，其中$D$为

$$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

分析：如图3－7，积分区域D为一个矩形，这是个比较简单的区域，先对y积分或先对x积分均可。

解法1：先对y积分。

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dx\,dy=\int_1^2 dx\int_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

$$=\int_1^2 x^2[\operatorname{arctg}y]_0^1dx$$

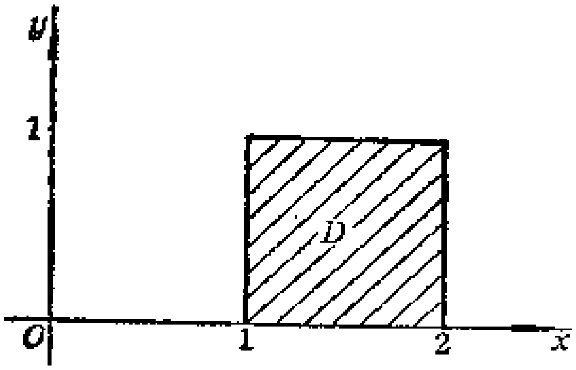


图 3—7

$$=\int_1^2 \frac{\pi}{4}x^2dx$$

$$\frac{\pi}{12}x^3\Big|_1^2$$

$$=\frac{7}{12}\pi\text{。}$$

解法2：先对x积分。

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dx\,dy=\int_0^1 dy\int_1^2\frac{x^2}{1+y^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,dy\int_1^2 x^2dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2dy$$

$$=\frac{7}{3}\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

$$=\frac{7}{3}\mathrm{arctg}\,y\Big|_0^1=\frac{7}{12}\pi\text{。}$$

问：如何计算二重积分 $\iint\limits_D dxdy$？其中D为曲线 $y=x$ $y=5x$和$x=1$所围成的区域。

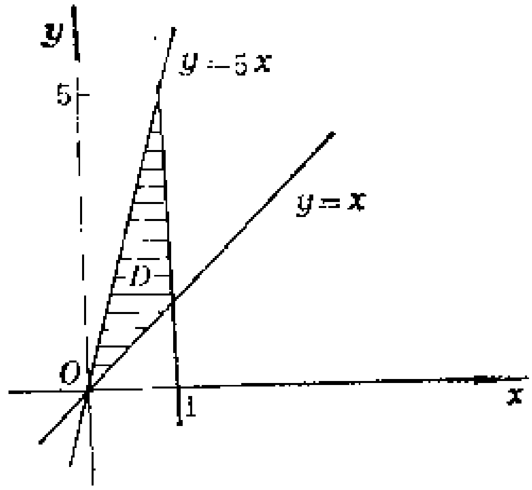


图 3—8

分析：首先画出区域D（图3—8），然后根据区域D的特点决定选用哪个累次积分公式。

解：画出区域D（图

3—8）．

从图3—8可以看出，区域D可表示为

$$D:\ \begin{cases} x\leqslant y\leqslant 5x, \\ 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

$$\therefore\ \iint\limits_D dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{5x}dy$$

$$=\int_0^1 y\Big|_x^{5x}dx$$

$$=\int_0^1 4xdx$$

$$=2x^2\Big|_0^1$$

$$=2.$$

本题若采用先对x积分，下面的计算对吗？

根据图3—8可知，积分区域D可表示为

$$D:\ \begin{cases} \dfrac{y}{5}\leqslant x\leqslant y, \\ 1\leqslant y\leqslant 5. \end{cases}$$

所以，有

$$\iint_D dxdy=\int_1^5 dy\int_{\frac{y}{5}}^{y}dx$$

$$=\Big|_1^5 x\Big|_{\frac{y}{5}}^{y}dy$$

$$=\int_1^5\frac{4}{5}ydy$$

$$=\frac{2}{5}y^2\Big|_1^5$$

$$=9\frac{3}{5}.$$

上面的计算是不对的。利用先对x积分，后对y积分的累次积分公式计算此题时，应对区域D做新的分析。从图3—9可以看出，区域D的右侧曲线为两条，即$x=y$与$x=1$。因此，不能简单的把D表示为：

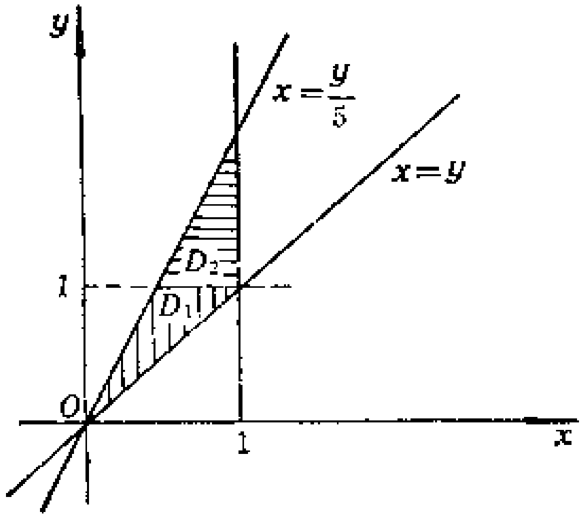


图 3—9

$$\begin{cases} \frac{y}{5}\leqslant x\leqslant y, \\ 1\leqslant y\leqslant 5. \end{cases}$$

而应将区域D分为D_1与D_2，其中

$$D_1: \begin{cases} \frac{y}{5}\leqslant x\leqslant y, \\ 0\leqslant y\leqslant 1; \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} \frac{y}{5}\leqslant x\leqslant 1, \\ 1\leqslant y\leqslant 5. \end{cases}$$

所以，有

$$\begin{aligned} \iint_D dxdy &= \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy \\ &= \int_0^1 dy\int_{\frac{y}{5}}^{y} dx + \int_1^5 dy\int_{\frac{y}{5}}^{1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{5}ydy + \int_1^5\left(1-\frac{y}{5}\right)dy \\ &= \frac{2}{5}y^2\Big|_0^1 + \left(y-\frac{1}{10}y^2\right)\Big|_1^5 \\ &= \frac{2}{5}+5-\frac{25}{10}-1+\frac{1}{10} \\ &= 2. \end{aligned}$$

从这里我们看到，同一个二重积分，由于选择不同的积分顺序，计算的繁简程度相差很大．因此，今后在计算二重积分时，应细心分析积分区域的特点，选择合理的积分顺序．

问：如何将二重积分：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 化为两种不同的累次积分形式？

其中区域D是由$y=x$，$x=a(a>0)$和$y=0$围成．

答： 画出区域D（如图3—10）．

1．先对y积分，后对x积分．

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x,\\ 0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

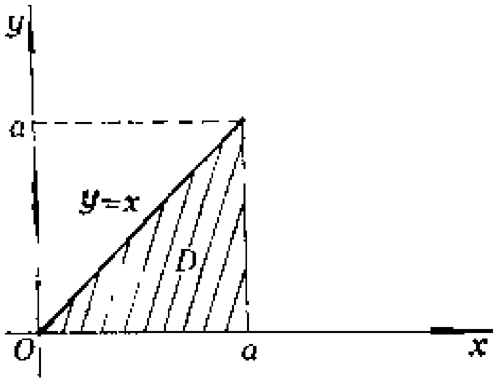


图 3—10

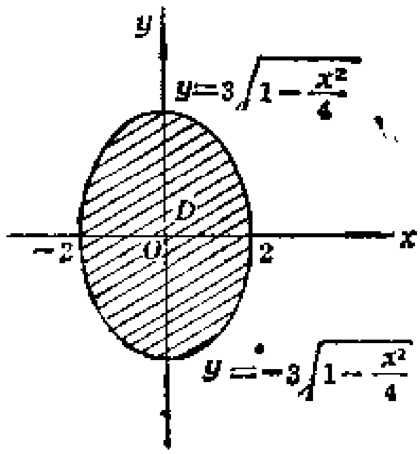


图 3—11

$$\therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy.$$

2．先对x积分后对y积分．

$$D:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant a,\\ 0\leqslant y\leqslant a.\end{cases}$$

$$\therefore \iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx.$$

问：如何将二重积分：$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 化为两种不同的累次

积分形式？其中区域D是由椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$围成？

答：画出区域D（如图3—11）．

1．先对y积分，后对x积分．

$$D:\begin{cases}-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\leqslant y\leqslant 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}},\\ -2\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-2}^{2}dx\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}f(x,y)dy.$$

2．先对x积分，后对y积分（如图3—12）．

$$D:\begin{cases}-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}},\\ -3\leqslant y\leqslant 3\end{cases}$$

$$\therefore\quad \iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_{-3}^{3}dy\int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}f(x,y)dx.$$

问：如何用两种方法计算二重积分：$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$？区域$D$是由曲线$y=x$，$xy=1$和$x=2$所围成．

答：方法一：画出区域D（如图3—13）．

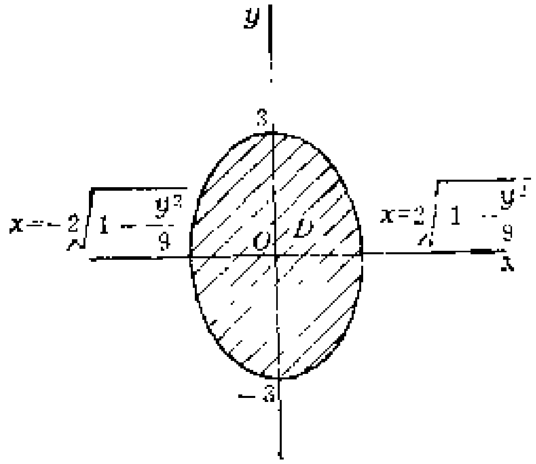


图 3—12

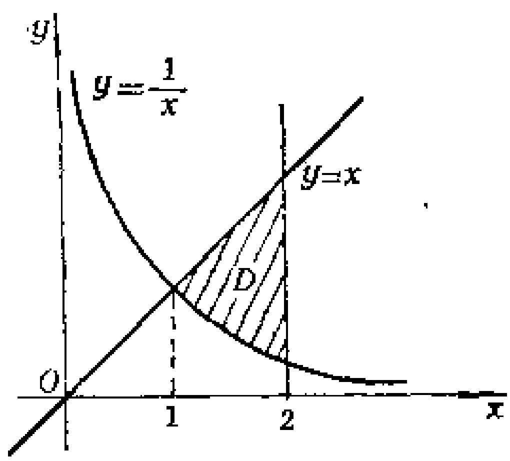


图 3—13

1．先对y积分，后对x积分

$$D:\begin{cases}\dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant x,\\ 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx$$

$$=\int_1^2(x^3-x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\frac{9}{4}.$$

方法二：先对x积分，后对y积分．

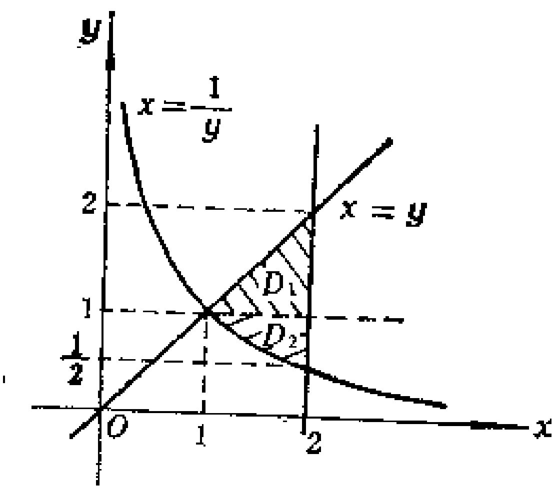


图 3—14

从图3—14可以看出，区域D的左边曲线由两条曲线$y=x$与$y=\dfrac{1}{x}$组成，所以应将区域D分成两个区域D_1和D_2.

$$D_1:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant 2,\\ 1\leqslant y\leqslant 2;\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases}\dfrac{1}{y}\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint\limits_{D} \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}\frac{x^2}{y^2}dxdy + \iint\limits_{D_2}\frac{x^3}{y^2}dxdy$$

$$=\int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy \int_y^2 x^2dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y^2}dy \cdot \int_{\frac{1}{y}}^2 x^2dx$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{y^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_y^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{y}}^2 dy$$

$$=\int_1^2 \frac{1}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{y^3}{3}\right)dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y^2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3y^3}\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{8}{y^2}-y\right)dy + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{8}{y^2}-\frac{1}{y^5}\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{8}{y}-\frac{1}{2}y^2\right]_1^2 + \frac{1}{3}\left[-\frac{8}{y}+\frac{1}{4}y^{-4}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{4}$$

$$=\frac{9}{4}.$$

问：若先对y积分后对 x 积分，能求出二重积分： $I=\iint\limits_{D}\frac{\sin y}{y}$

$dxdy$的最后结果吗?若不能.请用另一种积分顺序进行计算.

积分区域D为曲线$x=y^2$和$x=y$围成.

答：方法一：先对y积分后对x积分。

画出D的图形（如图 3 —15）.

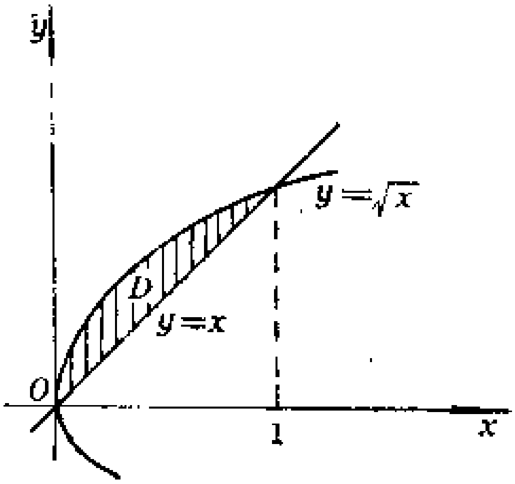


图 3—15

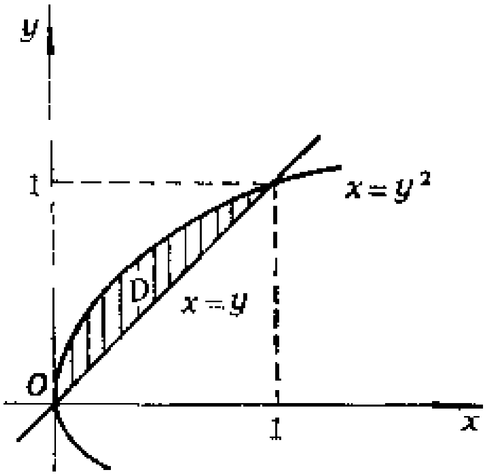


图 3—16

$$D:\ \begin{cases} x \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy.$$

我们知道，函数$\frac{\sin y}{y}$的原函数不能用初等函数表示，所以$\int_x^{\sqrt{x}}$ $\frac{\sin y}{y}dy$ 是积不出来的。这样，二重积分 I 就无法计算了。

方法二：先对x积分，后对y积分（如图 3 —16）．

$$D:\ \begin{cases} y^2 \leqslant x \leqslant y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad I = \iint\limits_D \frac{\sin y}{y}\, dxdy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^{y} dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$

$$=\int_0^1 \sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy$$

$$=-\cos y\Big|_0^1-[-y\cos y+\sin y]_0^1$$

$$=1-\cos 1-(\sin 1-\cos 1)$$

$$=1-\sin 1$$

$$\approx 0.1585.$$

从这里我们看到，合理地选择积分顺序，不但有计算繁简之别，而且会出现"积出"与"积不出"的情况。

问：应用"累次积分法"计算二重积分时，确定积分限应注意什么问题？

答：应注意下面三个问题：

1．在应用"累次积分法"时，里面积分的积分限一般应是外面积分变量的函数（在特殊情况也可能是常数）．

2．一般来说，外面积分的积分限应是常数。

3．在各个积分中，应注意积分下限小于积分上限。

问：指出下面各式错在哪里？

（1）$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-3}^{3} dx\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^3}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^3}{4}}} f(x,y)dx;$$

（2）$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{x^3}dx\int_{\sqrt{x}}^{x}f(x,y)dy;$$

（3）$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_2^3 dx\int_x^{\sqrt{x}}f(x,y)dy.$$

答：在一般情况下，上面三个式子都有错误。

（1）式错在里面的积分限不是外面积分变量的函数，而是里面积分的积分变量的函数。

（2）式错在外面积分的积分上限不是常数。

（3）式错在里面积分下限大于积分上限，这是因为，当$x\in[2,3]$时，有$\sqrt{x}<x$（图3—17）。

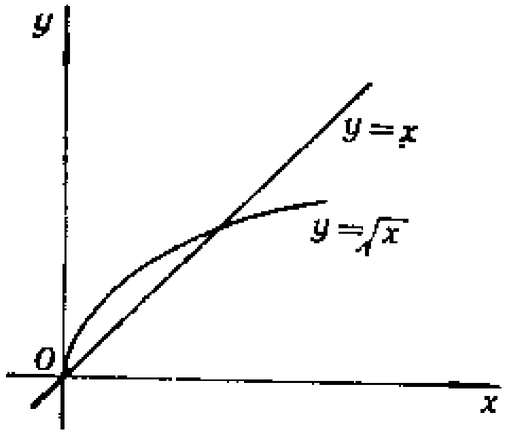


图 3—17

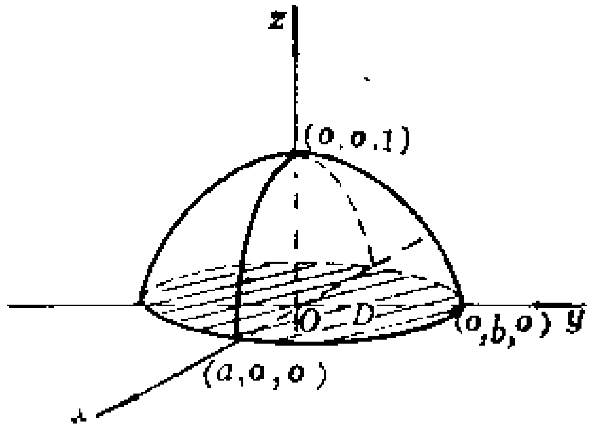


图 3—18

问：如何计算没有明确给出积分区域的二重积分呢？

答：有些二重积分，在题目中常不明确给出积分区域和被积函数，需要我们画出所求问题的图形，通过对图形的分析，确定二重积分的积分区域与被积函数。

例如，一物体由曲面$z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$及$xoy$坐标面所围成，试求该物体体积。

分析：这个问题没有明确告诉被积函数与积分区域。为此，可画出物体的图形（图3—18），这是一个位于xoy坐标面上方的椭圆抛物体。

根据二重积分的几何意义，可知被积函数为：$z=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$。

积分区域D为椭圆抛物面与xoy坐标面相交曲线$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围成（图3—18）。

从图3—18还可以看出，利用对称性，可先计算第一卦限的物体体积，然后再乘以4，则可求得物体的体积（图3—19）。

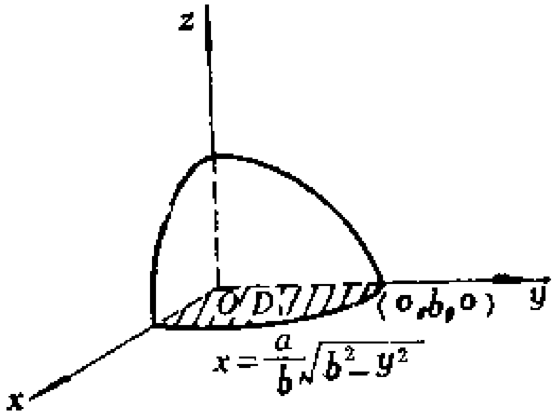


图 3—19

解：∵ $V=\iint\limits_{D}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$

$$=4\iint\limits_{D_1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy.$$

又，从图3—19可知，区域D_1可表示为

$$D_1:\ \begin{cases}0\leqslant x\leqslant \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\\ 0\leqslant y\leqslant b.\end{cases}$$

$$\therefore\quad V=4\iint\limits_{D_1}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$$

$$=4\int_0^b dy\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dx$$

$$=4\int_0^b\left[x-\frac{x^3}{3a^2}-\frac{y^2}{b^2}x\right]_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dy$$

$$=4\int_0^b\left[\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^3\right.$$

$$\left.-\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right]dy$$

$$=\frac{4a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\left[1-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)\right.$$

$$\left.-\frac{y^2}{b^2}\right]dy$$

$$=\frac{4a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{b^2-y^2}{3b^2}\right)dy$$

$$=\frac{4a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\cdot\frac{3b^2-3y^2-b^2+y^2}{3b^2}dy$$

$$=\frac{4a}{b}\int_0^b \frac{2}{3b^2}\sqrt{b^2-y^2}(b^2-y^2)dy$$

$$=\frac{8a}{3b^3}\int_0^b \sqrt{(b^2-y^2)^3}\,dy.$$

设$y=b\sin\theta$，$dy=b\cos\theta d\theta$，且当$0\leqslant y\leqslant b$ 时，有 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\quad V=\frac{8a}{3b^3}\int_0^b \sqrt{(b^2-y^2)^3}\,dy$$

$$=\frac{8a}{3b^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^3\cos^3\theta\cdot b\cos\theta\cdot d\theta$$

$$=\frac{8a}{3b^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^4\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{8}{3}ab\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}ab.$$

问：如何求两个底面半径相同的直交圆柱所围成的立体体积？

答：在这个问题中，既没有明确给出被积函数，也没有给出积分

区域。因此，首先应根据条件设出两个圆柱面的方程，并设这两个圆柱分别以 z 轴和 y 轴为对称轴（如图 3 —20）。

设两柱面方程分别为

$$x^2+y^2=R^2 \quad 和 \quad x^2+z^2=R^2,$$

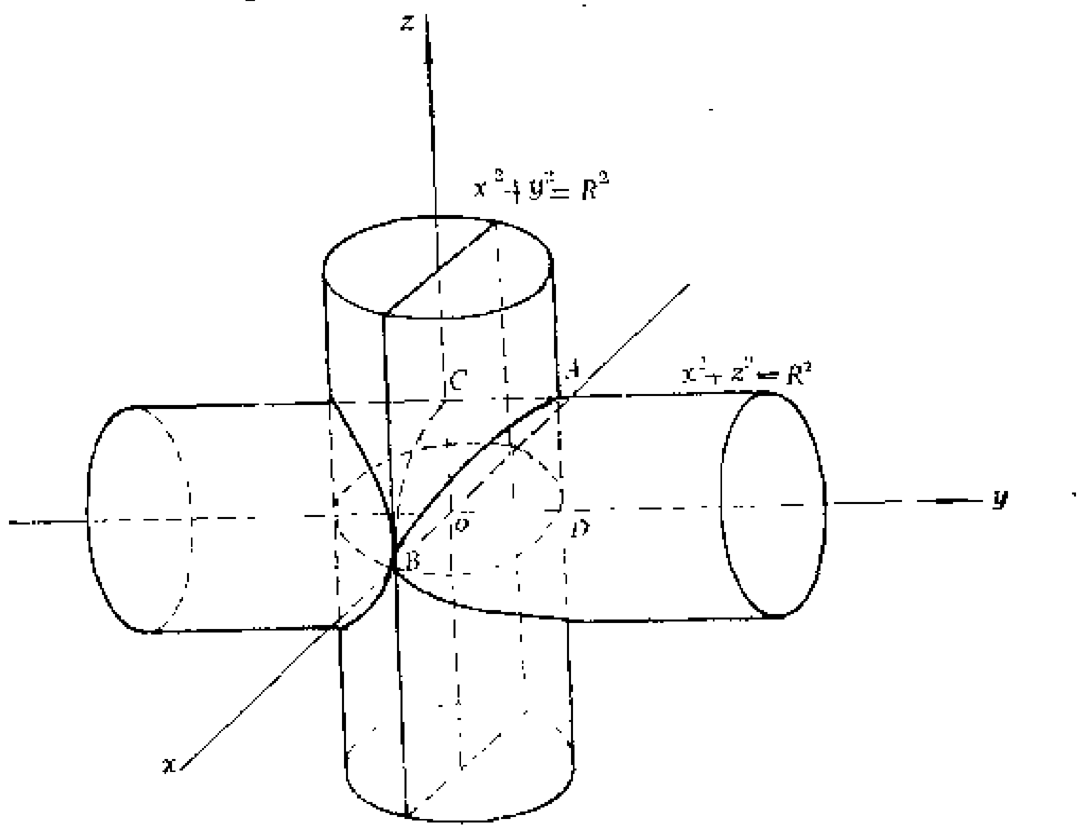


图 3—20

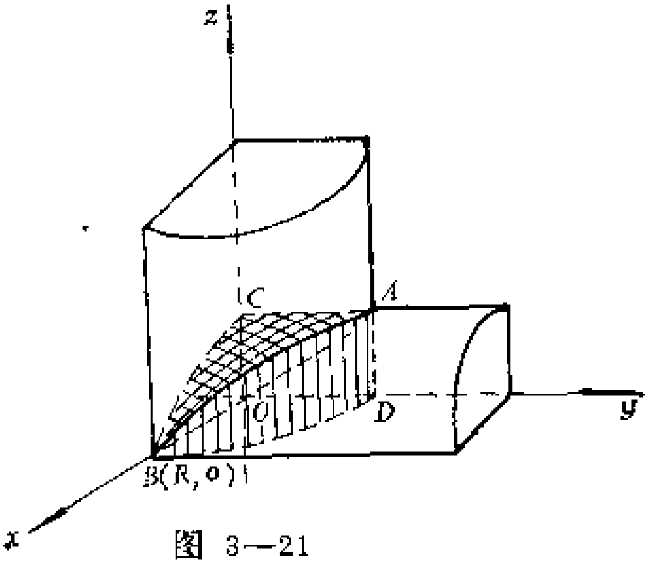


图 3—21

利用对称性，只要求出所求立体在第一卦限的部分体积（图

3—21），然后乘以 8 即可。

在xOy平面上，先对y积分，后对x积分，则积分区域D_1为

$$D_1: \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}, \\ 0 \leqslant x \leqslant R. \end{cases}$$

被积函数为：$z^2+x^2=R^2$，即$z=\sqrt{R^2-x^2}$，

∴ 所求立体体积为：

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \sqrt{R^2-x^2}\, d\sigma \\ &= 8\iint_{D_1} \sqrt{R^2-x^2}\, d\sigma \\ &= 8\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2}\, dy \\ &= 8\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \\ &= 8\int_0^R (R^2-x^2)\, dx \\ &= 8\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^R \\ &= 8 \cdot \frac{2}{3}R^3 \\ &= \frac{16}{3}R^3. \end{aligned}$$

问：如何利用被积函数的奇偶性，求被积函数为$z=12-3x-4y$，积分区域D为$x^2+4y^2\leqslant 4$的二重积分？

答： 此题实际上是求，以椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$所围成的区域$D$为底，以平面$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{12}=1$为顶的曲顶柱体体积（如图3—22）。

先对x积分，后对y积分，被积函数为：$z=12-3x-4y$，

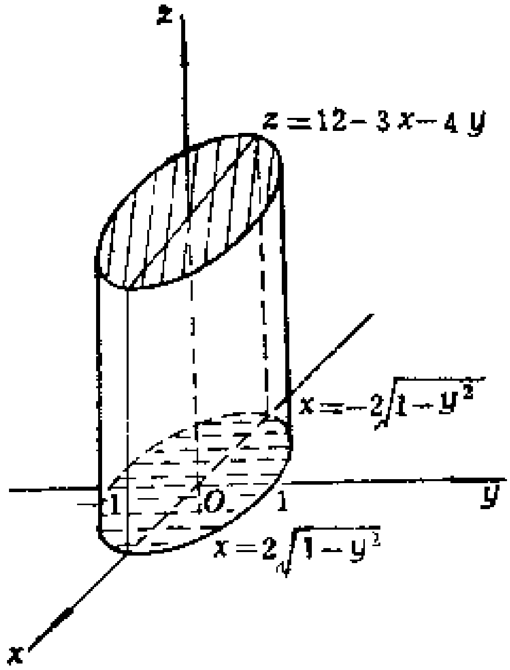


图 3—22

积分区域为

$$D:\quad \begin{cases} -2\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{1-y^2}, \\ -1\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad V=\iint\limits_D (12-3x-4y)\,dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}(12-3x-4y)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}(12-4y)\,dx-\int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}3x\,dx,$$

在积分$\int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}3xdx$中，由于被积函数为奇函数，且积分限为对称区间，

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}3x\,dx=0.$$

$$\because \quad \int_{-1}^{1}dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}(12-4y)\,dx$$

$$= 4\int_{-1}^{1}(3-y)dy\int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}dx$$

$$= 8\int_{-1}^{1}(3-y)dy\int_{0}^{2\sqrt{1-y^2}}dx$$

$$= 16\int_{-1}^{1}(3-y)\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 16\int_{-1}^{1}3\sqrt{1-y^2}\,dy - 16\int_{-1}^{1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 16\cdot 6\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy - 0$$

$$= 96\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy,$$

$$\therefore \quad V = 96\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 96\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2} + \arcsin y\right)\right]_{0}^{1}$$

$$= 96\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= 24\pi.$$

三、应用极坐标计算二重积分

问：二重积分在极坐标系中化为累次积分应注意什么问题？

答：在计算二重积分时，首先应注意根据被积函数与积分区域的特点，来决定是否应用极坐标。一般来说，当积分区域为圆域或圆域的一部分时，常可采用极坐标；当被积函数中含有x^2+y^2，$\frac{y}{x}$等项时，用极坐标计算常常比较简单。

其次，将二重积分$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$进行极坐标变换时，应注意下面三点：

（1）应把被积函数$f(x, y)$中的x、y用$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代换。

（2）将面积元素$d\sigma$用$\rho d\rho d\theta$代换。

（3）将积分区域D用极坐标表示。

最后，在应用极坐标计算时，还应分清极点是否在积分区域里。若极点在积分区域里（图3—23），则区域D表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta),\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi.\end{cases}$$

若极点不在积分区域里（图3-24），则积分区域表示为

$$D:\begin{cases}\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\\\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2.\end{cases}$$

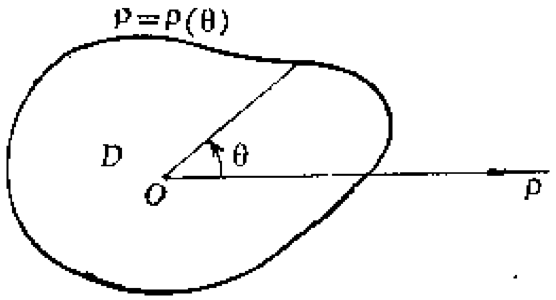


图 3—23

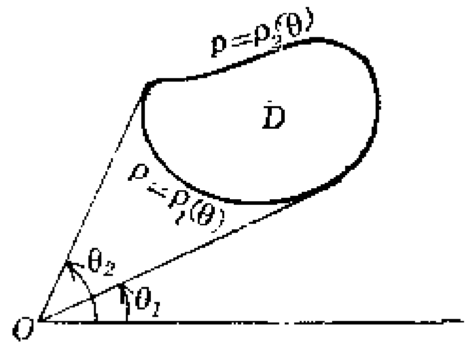


图 3—24

问：如何应用极坐标将连续函数$f(x, y)$在两圆$x^2+y^2=4$和$x^2+y^2=1$围成的环形区域D上的二重积分化为二次积分？

答：首先画出积分区域D（图3—25）。

可令极坐标系的极点在原点，则积分区域D可表示为

$$D:\begin{cases}1\leqslant\rho\leqslant2,\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi.\end{cases}$$

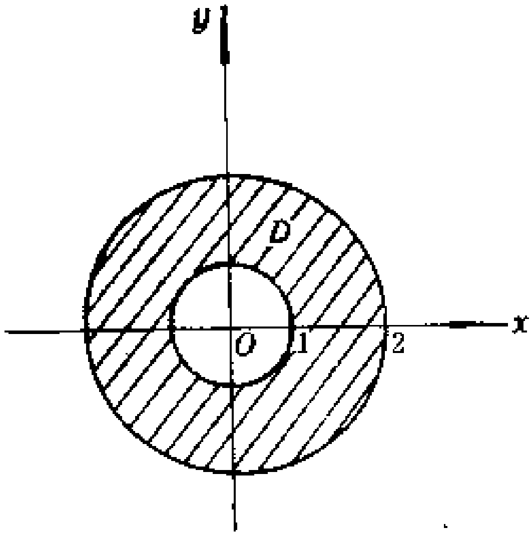


图 3—25

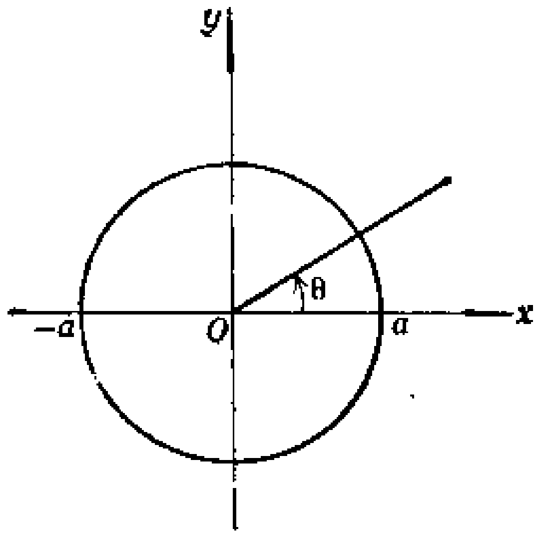


图 3—26

$$\therefore \iint_D f(x, y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

问：如何用极坐标计算二重积分：$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$？其中积分区域$D$为：$x^2+y^2\leqslant a^2$.

答：积分区域D是个以坐标原点为圆心的圆闭域（图3—26），可令极坐标极点在坐标原点，则区域D可表示为

$$D:\begin{cases} 0\leqslant\rho\leqslant a, \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \iint_D e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a d\theta \\ &= \pi(1-e^{-a^2}). \end{aligned}$$

这个二重积分如果不利用极坐标是积不出来的。所以，合理地利用极坐标，不仅可以简化二重积分的计算，而且还可以解决某些直角坐标“积不出来的”二重积分。

问：如何计算二重积分：$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$？其中积分区域 D 为 $x^2+y^2=Ry$ 围成圆域。

答： 根据积分区域的特点（图3-27），可用极坐标进行计算，且设极点在坐标原点。

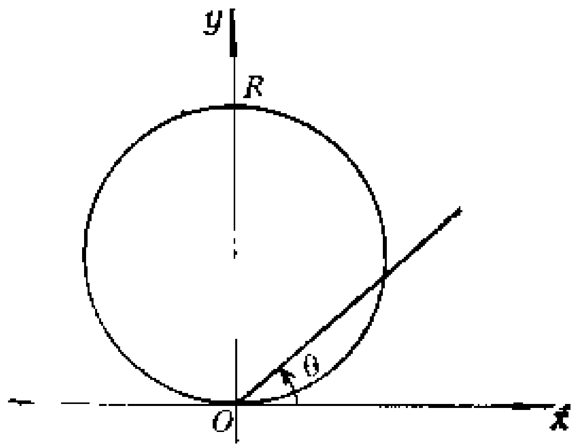


图 3—27

∵ 积分区域 D 可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant R\sin\theta,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

∴ $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

$$=\iint\limits_D \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^\pi d\theta\int_\pi^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

$$=\int_0^\pi\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{R\sin\theta}d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\sin\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^\pi R^3\cdot|\cos^3\theta|\,d\theta+\int_0^\pi\frac{1}{3}R^3d\theta$$

$$=\frac{\pi}{3}R^3-\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}|\cos^3\theta|d\theta.$$

$$\because\quad \int_0^{\pi}|\cos^3\theta|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos^3\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta$$

$$=\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3},$$

$$\therefore\quad \iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{3}R^3-\frac{R^3}{3}\cdot\frac{4}{3}$$

$$=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

问：如何计算二重积分$\iint\limits_D dxdy$？其中积分区域为$\rho\geqslant a$与$\rho^2=2a^2\cos2\theta$围成？

答： 首先画出积分区域D(图3—28)．

利用对称性，可知

$$\iint\limits_D dxdy=4\iint\limits_{D_1}dxdy.$$

$\because$ 区域D_1可表示为

$$D_1:\begin{cases}a\leqslant\rho\leqslant a\sqrt{2\cos2\theta},\\0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

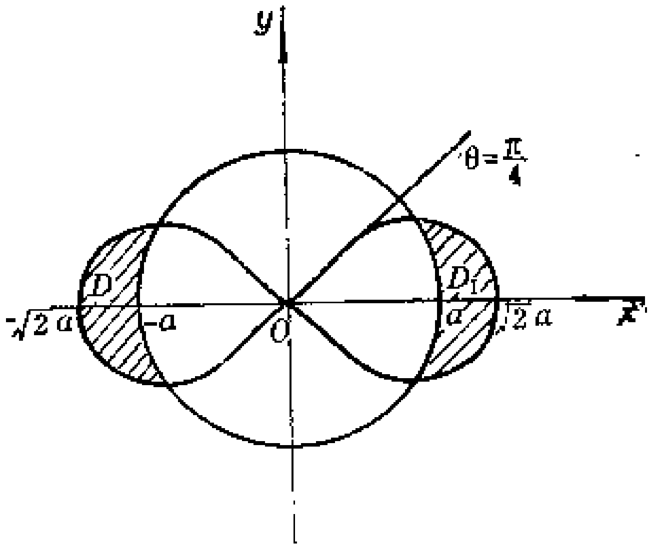


图 3—28

$$\therefore \quad \iint\limits_{D} dxdy = 4\iint\limits_{D_1} dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos 2\theta - 1) d\theta$$

$$= 2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

四、二重积分的应用

问：二重积分有哪些应用？

答： 二重积分在几何、物理等方面有着广泛的应用。

（一）几何方面的应用

1．利用被积函数 $f(x, y) = 1$ 的二重积分，可以计算积分区域 D 的面积，即

$$S_D=\iint\limits_D dxdy.$$

2．利用二重积分，可求出曲顶柱体的体积，即

$$V=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy.$$

3．当与积分区域D对应的曲面方程$z=f(x,\ y)$具有连续偏导数$f'_x(x,\ y)$和$f'_y(x,\ y)$时，可求出曲面面积，即

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+[f'_x(x,\ y)]^2+[f'_y(x,\ y)]^2}\,dxdy.$$

（二）物理方面的应用

1．若平面薄片的密度函数为$\mu(x,\ y)$，利用二重积分可求出该薄片的质量，即

$$M=\iint\limits_D \mu(x,\ y)\,dxdy.$$

2．利用下面的公式可求出平面薄片的重心坐标$(\bar{x},\ \bar{y})$，即

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_D x\cdot\mu(x,\ y)\,dxdy,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_D y\cdot\mu(x,\ y)\,dxy.$$

3．利用二重积分可求出平面薄片对旋转轴的转动惯量，当旋转轴为y轴时，有

$$I_{\text{惯量}}=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mu(x,\ y)\,dxdy.$$

问：如何求双纽线$\rho^2=a^2\cos 2\theta$围成的面积？

答： 如图3-29，有

$$S=\iint\limits_D dxdy=4\iint\limits_{D_1} dxdy=4\iint\limits_{D_1}\rho\, d\theta d\rho.$$

且积分区域D_1可表示为

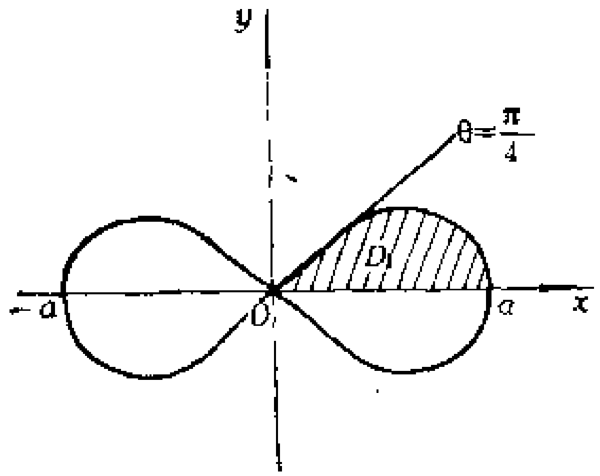


图 3—29

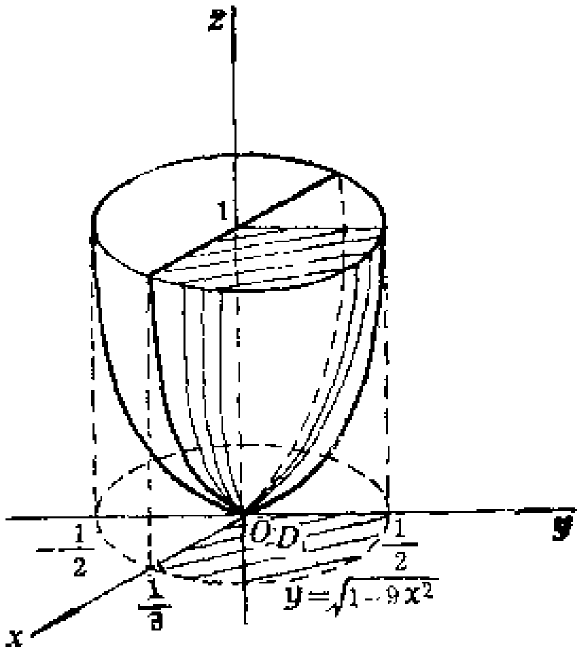


图 3—30

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant a\sqrt{\cos 2\theta},\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad S=4\iint_{D_1}\rho d\theta d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\rho d\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2}{2}\cos 2\theta d\theta=4\cdot\frac{a^2}{4}$$

$$=a^2.$$

问：如何求椭圆抛物面$z=9x^2+4y^2$与平面$z=1$围成的立体体积？

答：如图3—30，要求平面$z=1$下面，抛物面$z=9x^2+4y^2$上面的立体体积，因此被积函数应为

$$f(x,\ y)=1-(9x^2+4y^2).$$

积分区域D为xoy坐标平面上的椭圆域

$$9x^2+4y^2\leqslant 1.$$

根据对称性，可仅计算区域D_1所对应的立体体积，然后乘以4即可。

∵ 区域D_1可表示为

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{1-9x^2},\\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad V&=4\iint_{D_1}(1-9x^2-4y^2)\,dxdy\\&=4\int_0^{\frac{1}{3}}dx\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}}(1-9x^2-4y^2)\,dy\\&=4\int_0^{\frac{1}{3}}\left[y-9x^2y-\frac{4}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}}dx\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{3}}(1-9x^2)^{\frac{3}{2}}dx\\&=\frac{4}{9}\int_0^{\frac{1}{3}}[1-(3x)^2]^{\frac{3}{2}}d(3x)\\&=\frac{4}{9}\left\{\frac{3x}{8}[5-2(3x)^2]\cdot\sqrt{1-(3x)^2}+\frac{3}{8}\arcsin 3x\right\}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

问：如何求由坐标面，平面$x=4$，$y=4$和抛物面$z=x^2+y^2+1$所围成的立体体积？

答： 如图3—31，积分区域D为xoy坐标面上的正方形，它可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

且被积函数应为$z=x^2+y^2+1$。

则所求立体体积为

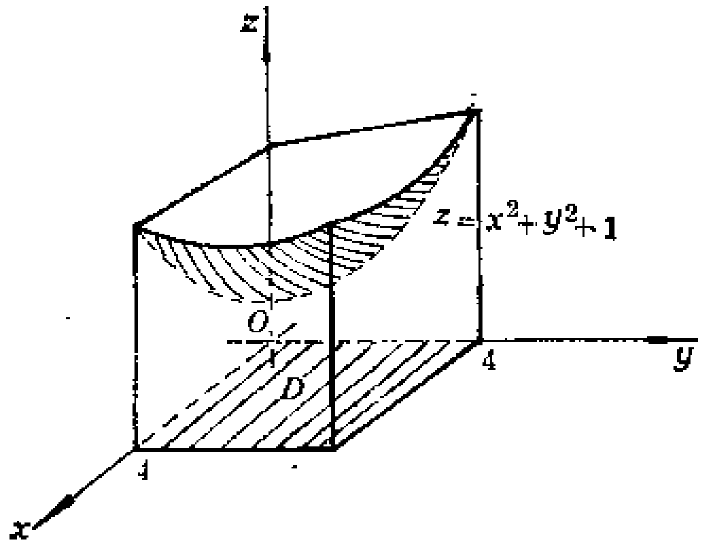


图 3—31

$$V=\iint\limits_D(1+x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^4 dx\int_0^4(1+x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^4\left(\frac{76}{3}+4x^3\right)dx$$

$$=\frac{560}{3}.$$

问：如何求旋转抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分的曲面面积？

答：如图3—32，根据对称性，仅求出 xoy 坐标面上区域 D_1 上方曲面 S_1 的面积，然后乘以 4，就可得到所求的曲面面积.

由于积分区域 D 为圆域，所以可用极坐标进行计算.

区域 D_1 可表示为：

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 1,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

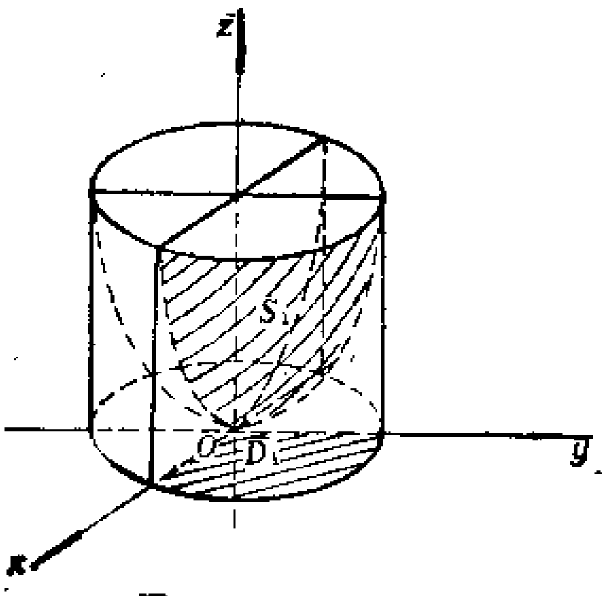


图 3—32

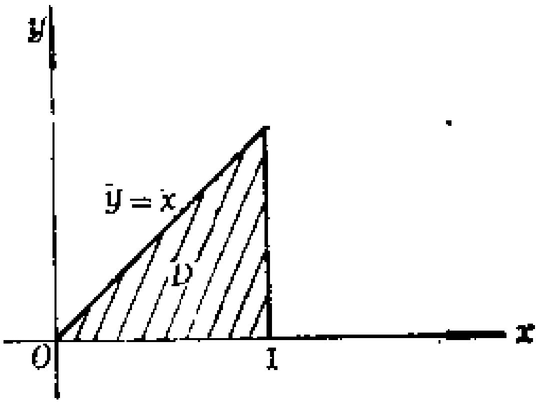


图 3—33

∵　被积函数 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 具有一阶连续偏导数

$$z'_x=x,\ z'_y=y,$$

∴　所求面积S为

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$$

$$=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\cdot d\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{1+\rho^2}\,d(1+\rho^2)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+\rho^2)^3}\right]_0^1 d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{8}-1)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi,$$

问：若平面薄片的密度函数为$\mu=x^2+y^2$，如何求由$x=1$，$y=0$和$y=x$围成的三角形薄片的质量？

答：如图3-33，积分区域D可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x,\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

∴　平面薄片的质量为

$$M=\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_0^1\frac{4}{3}x^3dx$$

$$=\frac{1}{3}x^4\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}.$$

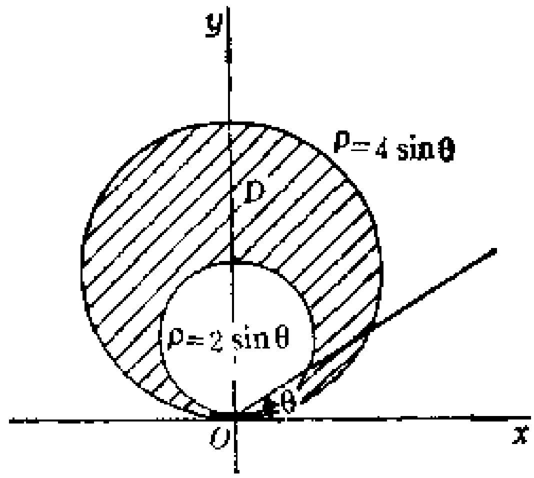


图 3—34

问：如何求位于两圆$\rho=2\sin\theta$和$\rho=4\sin\theta$之间均匀薄片的重心？

答：如图3-34，薄片的重心必在y轴上，所以仅求重心的纵坐标$\bar{y}$即可。

∵　积分区域D可表示为

$$D:\begin{cases}2\sin\theta\leqslant\rho\leqslant 4\sin\theta,\\0\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

且密度函数为$\mu=1$，

故所求重心的纵坐标为

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y d\sigma$$

$$=\frac{1}{M}\iint_D \rho\sin\theta\rho d\rho d\theta.$$

∵　$\mu=1$，则$M=D$.

于是

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D \rho\sin\theta\rho d\rho d\theta$$

$$=\frac{1}{D}\iint_D \rho\sin\theta\rho d\rho d\theta.$$

∵　$$\iint_D \rho\sin\theta\rho d\rho d\theta=\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho\sin\theta\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2 d\rho$$

$$=\frac{56}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=7\pi.$$

又设由曲线$\rho=4\sin\theta$围成的面积为D_1，由曲线$\rho=2\sin\theta$围成的面积为D_2，则$D=D_1-D_2$.

∵　$$D_1=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4\sin\theta}\rho d\rho=4\pi,$$

同理，$$D_2=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho d\rho=\pi,$$

∴　$D=D_1-D_2=3\pi$,

故　$$\bar{y}=\frac{1}{D}\iint_D y d\sigma=\frac{7\pi}{3\pi}=\frac{7}{3}.$$

因此所求平面薄片的重心坐标为$\left(0，\frac{7}{3}\right)$.

问：如何求均匀半椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$和$x\geqslant 0$ 所围成的平面薄片的重心？

答如图3—35，平面薄片的重心必在x轴上，所以仅求重心的横坐标$\bar{x}$即可。

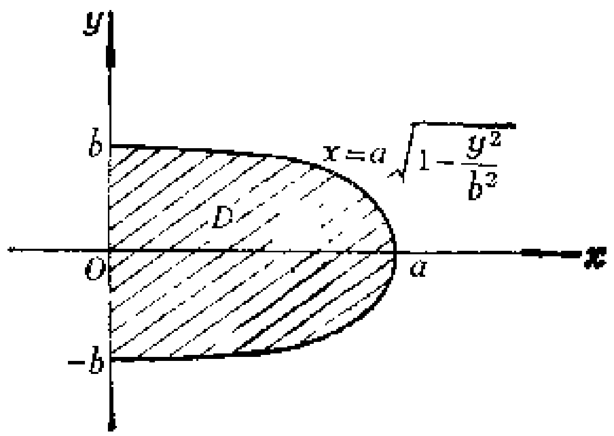


图 3—35

∵ 积分区域D可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},\\ -b\leqslant y\leqslant b,\end{cases}$$

且密度函数为$\mu=1$，

故所求薄片重心的横标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x d\sigma$$

$$=\frac{1}{D}\iint_D x d x.$$

$$∵\quad \iint_D x d\sigma=\int_{-b}^{b} dy\int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x dx$$

$$=\int_{-b}^{b}\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dy$$

$$=2\int_0^b \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}dy$$

$$=a^2\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$

$$=\frac{2}{3}a^2b,$$

又∵ $M=D=\frac{1}{2}\pi ab,$

∴ $\bar{x}=\frac{1}{D}\iint\limits_D x d\sigma=\frac{\frac{2}{3}a^2b}{\frac{1}{2}\pi ab}=\frac{4a}{3a}.$

即所求平面薄片的重心坐标为$\left(\frac{4a}{3\pi},\ 0\right)$.

问：如何求边长为a的正方形对其一个顶点的惯矩($\mu=1$)？

答： 设正方形的一个顶点在坐标原点，两个边分别在x轴和 y 轴上（图3—36），则积分区域D可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant a,\\0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

∴ 正方形以顶点O的惯矩为

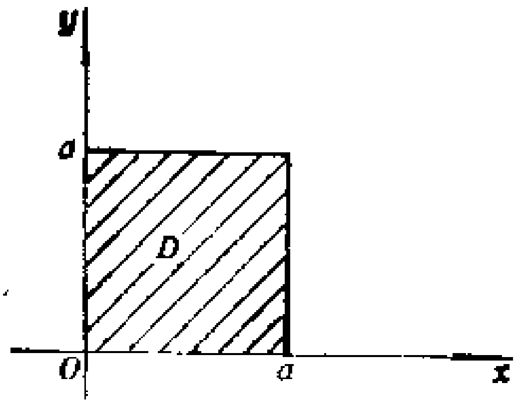


图 3—36

$$I_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mu dxdy$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^a dx\int_0^a(x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{2}{3}a^4.$$

五、三重积分的概念

问：三重积分是如何定义的？

答：类似于定积分、二重积分的定义，三重积分的定义为：

设$f(x, y, z)$为定义在空间闭域Ω上的三元函数。

（1）以任意分法将Ω分成n个子域$\Delta\bar{V}_1$, $\Delta\bar{V}_2$, $\cdots\Delta\bar{V}_i$, $\cdots$ $\Delta\bar{V}_n$, 其中$\Delta\bar{V}_i$代表第i个子域及其体积。

（2）在每个子域$\Delta\bar{V}_i(i=1,2,3,\cdots n)$上任取一点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，并求积：$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\bar{V}_i$。

（3）求和：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \mu_i, \zeta_i)\Delta\bar{V}_i$,

（4）当$n\to\infty$，且各子域$\Delta\bar{V}_i(i=1,2,\cdots, n)$的最大直径$d$*$\to$ 0时，若和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \mu_i, \zeta_i)\Delta\bar{V}_i$的极限存在，则称此极限值为函数$f(x, y, z)$在空间$\Omega$上的三重积分。记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)d\bar{V}=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\{di\}\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\bar{V}_i,$$

其中空间闭域Ω为三重积分的积分区域，$f(x, y, z)$为被积函数，$d\bar{V}$为体积元素。

问：学习三重积分定义时，应注意什么问题？

答：从三重积分的定义可以看出，三重积分是二重积分的直接推广，在学习时应注意：

（1）三重积分的研究对象是三元函数，其积分区域为空间闭域。

（2）分割空间闭域Ω的是两族任意的曲面，三重积分与分法及点$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$的取法无关。

* $d=\max\{d_i\}$，其中d_i为$\Delta\bar{V}_i$的直径$(i=1,2,\cdots,n)$。

(3)各子域ΔV_i的最大直径$d=\max\{d_i\}\to 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，说明各子域ΔV_i从各方面无限缩小为一点。

(4)dV称为三重积分的体积元素，在空间直角坐标系中，若用平行于三个坐标面的平面分割区域Ω，则Ω可分成一些长方体和不规则体积。当$d\to 0$时，后者趋于零，故我们仅研究那些长方体，它们的体积可表示为

$$\Delta V_i=\Delta x_i\cdot\Delta y_i\cdot\Delta z_i$$

即 $dV=dxdydz$.

由于三重积分与分法无关，所以，三重积分一般表示为

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz.$$

(5)三重积分有与二重积分相类似的性质。

六、三重积分的计算

问：在空间直角坐标系中，如何将三重积分$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$转化为三次积分的形式？

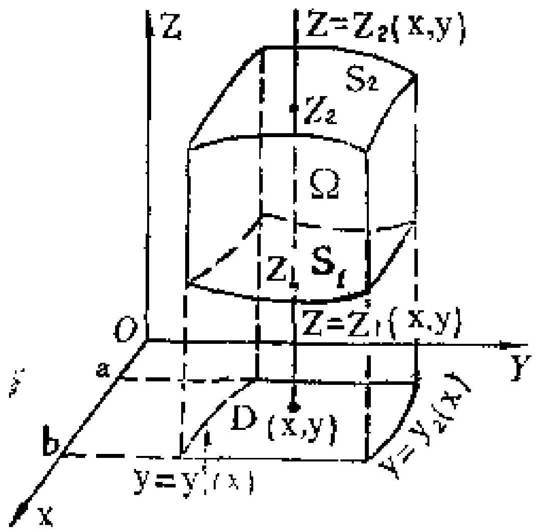


图 3—37

答：如果函数$f(x,y,z)$在空间闭域Ω上连续，且平行于z轴的任何直线与Ω的边界曲面S不多于二个交点(图3—37)，则可通过下面三步将三重积分转化为三次积分的形式。

(1)将空间闭域Ω投影到xoy坐标面上，得一平面区域D，以D的

边界曲线为准线，做母线平行于 z 轴的柱面，该柱面与曲面 S 的交线 l 将 S 分成两部分 S_1 和 S_2（图3—37），且它们的方程分别为

$$S_1:\ z=z_1(x,\ y),$$
$$S_2:\ z=z_2(x_1,\ y).$$

则 z_1 与 z_2 都是平面区域 D 上的连续函数，且 $z_1\leqslant z_2$。

（2）沿 z 轴方向取函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在区域 $[z_1,\ z_2]$ 上的积分，此时暂将 $x,\ y$ 视为常数，其积分结果显然为 $x,\ y$ 的一个函数，即

$$F(x,\ y)=\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz.$$

（3）在平面区域 D 上计算函数 $F(x,\ y)$ 的二重积分，即

$$\iint_D F(x,\ y)d\sigma=\iint_D\left[\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\ dz\right]dxdy.$$

根据二重积分的累次积分法，有

$$\iint_D F(x,\ y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz$$

或 $$\iint_D F(x,\ y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}dx\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz.$$

这样我们就将三重积分转化为先对 z 积分，再对 y（或 x）积分，最后对 x（或 y）积分的三次积分形式．显然，我们也可以将三重积分转化为先对 x 积分、再对 y（或 z）、最后对 z（或 y）积分或先对 y 积分、再对 x（或 z）、最后对 z（或 x）的三次积分形式。我们把这种计算方法称为三重积分的累次积分法。

问：在直角坐标系中，应用累次积分法计算三重积分的步骤是什么？

答： 大体可分下面三步：

（1）画出空间闭域 Ω，根据图形和所给的曲面方程确定关于 z 的积分限：

$$z_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant z_2(x,\ y).$$

（2）将空间闭域Ω投影到xoy平面，得一平面闭域D，若先对y后对x积分，则可将区域D表示为

$$D:\begin{cases} y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\\ a\leqslant x\leqslant b. \end{cases}$$

此时，空间闭域Ω表示为

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant z_2(x,\ y),\\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\\ a\leqslant x\leqslant b. \end{cases}$$

（3）应用累次积分法计算三重积分，即

$$\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dz.$$

在计算三重积分时，有时根据空间Ω的特点，将Ω投影到xoz平面或yoz平面上，其方法与上述方法类似。

问：如何计算由抛物面$x^2+y^2=6-z$，坐标面xoz，yoz以及平面$y=4z$，$x=1$，$y=2$所围成的立体体积V？

答： 我们知道，当被积函数$f(x,\ y,\ z)=1$时，三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,\ y,\ z)dxdydz=\iiint_{\Omega} dxdydz$$

为空间闭域Ω的体积。

首先画出空间闭域Ω（图3—38），并确定变量z的积分限。

由于 $z_1(x,\ y)=\dfrac{1}{4}y$，$z_2(x,\ y)=6-x^2-y^2$，

$$\therefore\quad \frac{1}{4}y\leqslant z\leqslant 6-x^2-y^2.$$

然后将该立体投影到xoy平面上，得矩形区域D，用不等式表示为

$$D:\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

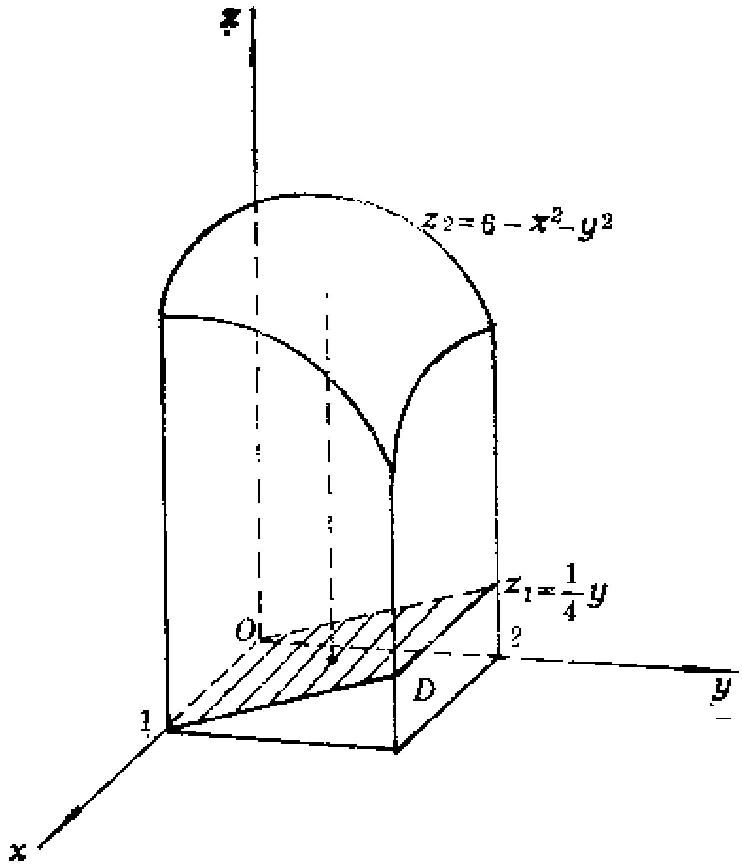


图 3—38

则所求立体体积为

$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_{\frac{1}{4}y}^{6-x^2-y^2} dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 (6-x^2-y^2-\frac{1}{4}y)dy$$

$$=\int_0^1 \left[6y-x^2y-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{8}y^2\right]_0^2 dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{53}{6}-2x^2\right)dx$$

$$=\frac{41}{6}.$$

问：如何计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$？其中Ω由双曲抛物面$z=xy$及平面$x+y=1$，$xoy$坐标面围成。

答：首先画出空间闭域Ω（图3—39），并确定变量z的积分限。

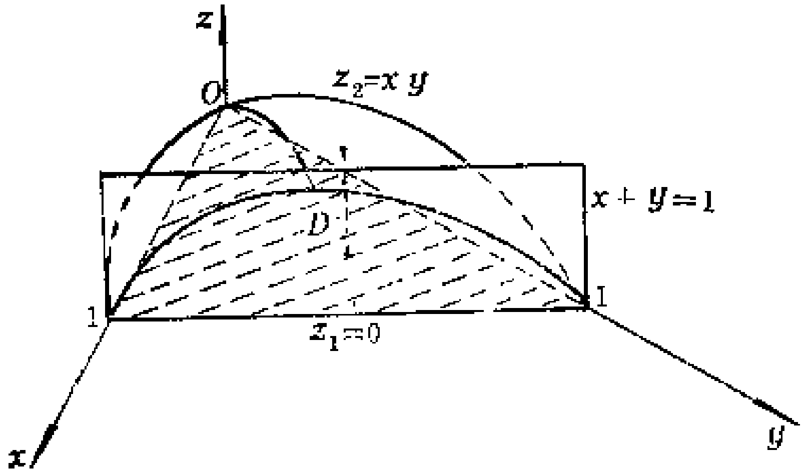


图 3—39

由于$z_1(x, y)=0$，$z_2(x, y)=xy$,

∴ $0 \leqslant z \leqslant xy$

将Ω投影到xoy平面，由图3-38看出该平面区域D为三角形区域，用不等式表示为

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1-x, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

∴ 所求积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} ydy\int_0^{xy} dz$$

$$=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} xy^2dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2y^3\Big|_0^{1-x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^2-3x^3+3x^4-x^5)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{180}.$$

问：如何求三重积分$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dxdydz$？其中Ω由抛物柱面$y=\sqrt{x}$，平面$xoz$和$z=\frac{\pi}{2}-x$所围成。

答：首先画出空间闭域（图3—40），并确定变量z的积分限．

由于 $z_1=0$，$z_2=\frac{\pi}{2}-x$，

$\therefore\quad 0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}-x.$

然后将Ω投影到xoy平面上，得一平面区域D，且有

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

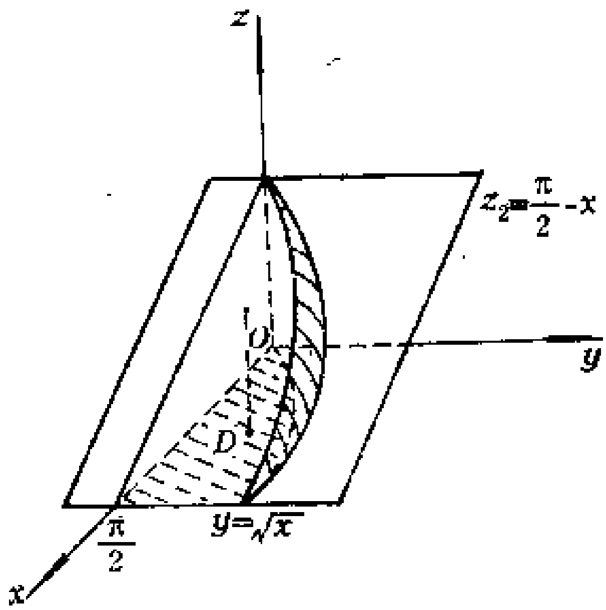


图3—40

$\therefore$ 所求的积分为

$$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dxdydz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z+x)\,dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx\int_0^{\sqrt{x}}ydy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)xdx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

问：若将上问中的空间闭域Ω投影到xoz平面上，如何计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}y\cos(z+x)dxdydz$？

答：如图3—41所示，Ω投影到xoz平面上，得到三角形的平面区域D'，且有

$$D':\begin{cases}0\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}-x,\\0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

从图3-41还可以看出，变量y的变化范围为$0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}$.

$$\therefore\quad\iiint\limits_{\Omega}y\cos(z+x)dxdydz$$

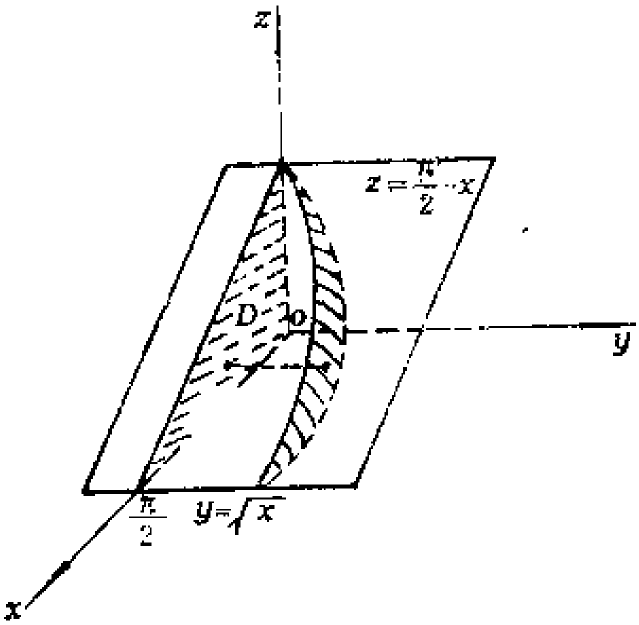


图 3—41

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}dz\int_0^{\sqrt{x}}y\cos(z+x)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z+x)dz\int_0^{\sqrt{x}}ydy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z+x)dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left[\sin(z+x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

七、应用柱坐标计算三重积分

问：什么是柱面坐标？柱面坐标与直角坐标有什么关系？

答： 在空间直角坐标系中，空间一点M与有序实数组(x, y, z)是一一对应的（图3—42），其中x, y为点M在xoy坐标平面上投影点P的直角坐标。现在该坐标面上，用极坐标(ρ, θ)表示点P，则空间点M就与(ρ, θ, z)一一对应了（其中$0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）。

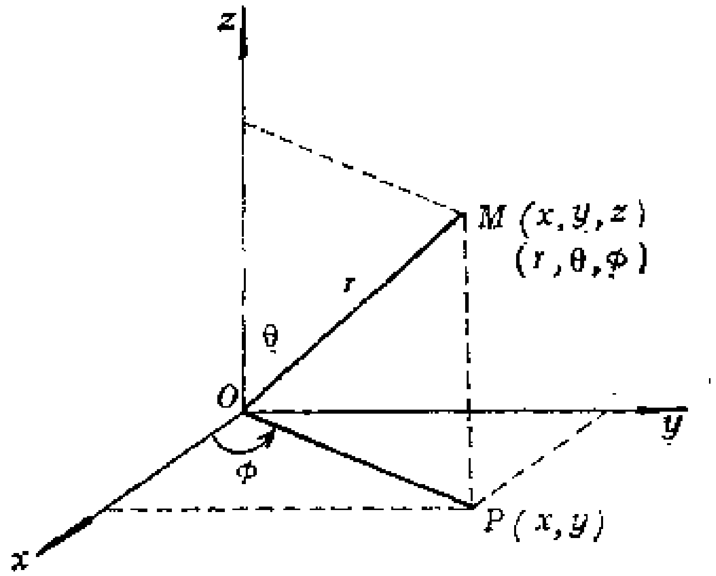


图 3—42

我们称有序数组(ρ, θ, z)为空间点M的柱面坐标，记为$M(\rho, \theta, z)$。显然，柱面坐标就是平面极坐标与坐标轴z联合使用的坐标。由此可知，空间一点M的直角坐标(x, y, z)与该点的柱面坐标(ρ, θ, z)之间有下面的关系：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\theta = \dfrac{y}{x}, \\ z = z. \end{cases}$$

问：在柱面坐标系中，当ρ、φ、z分别为常数时，各表示什么图形？

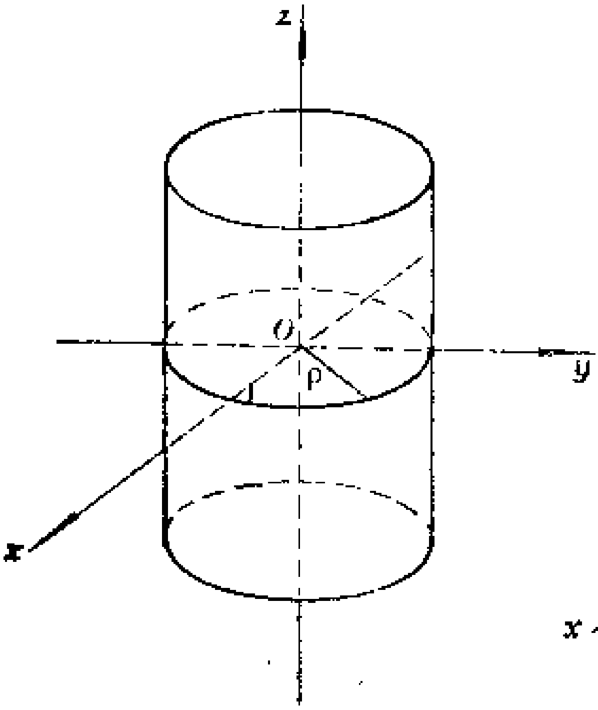


图 3—43

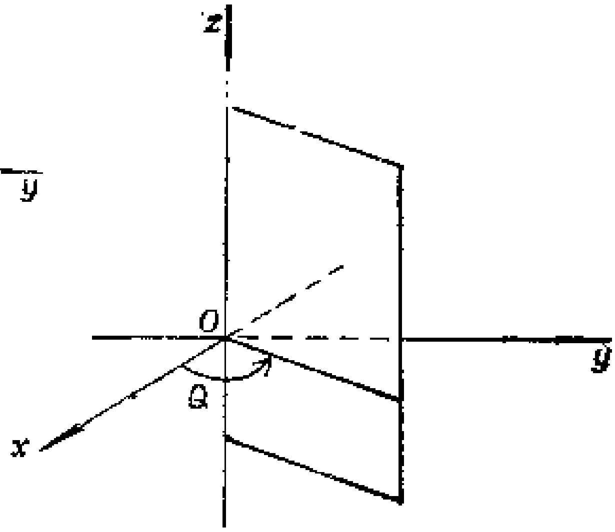


图 3—44

答：1．当 ρ 为常数时，表示以 z 轴为中心轴，ρ 为半径的圆柱面（图3—43）。

2．当 θ 为常数时，表示过 z 轴的半平面，该平面与 xoz 坐标面的夹角为 θ（图3—44）．

3．当 z 为常数时，表示平行于xoy坐标面的平面(图3—45)．

我们把这三个曲面称为柱坐标面。

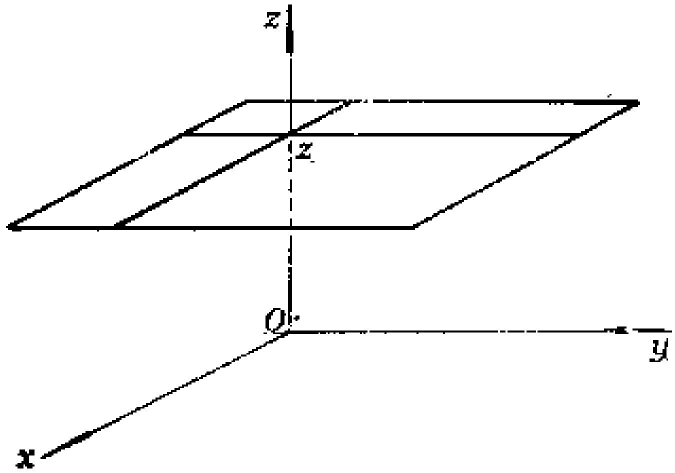


图 3—45

问：在柱面坐标系中，当$\begin{cases}\rho\text{为常数}\\ \theta\text{为常数}\end{cases}$，$\begin{cases}\rho\text{为常数}\\ z\text{为常数}\end{cases}$，及$\begin{cases}\theta\text{为常数}\\ z\text{为常数}\end{cases}$

时，分别表示什么图形？

答：1．当$\begin{cases}\rho \text{ 为常数}\\ \theta \text{ 为常数}\end{cases}$时，表示以$z$轴为中心轴，$\rho$为半径的圆柱面和与$xoz$坐标面夹角为$\theta$的半平面的交线，这条交线是一条与$z$轴平行且距离为$\rho$的直线$l$（图3—46）。

2．当$\begin{cases}\rho \text{ 为常数}\\ z \text{ 为常数}\end{cases}$时，表示圆心在$z$轴，半径等于$\rho$且与$xoy$坐标面平行的圆$C$，它是以$z$轴为中心轴，半径为$\rho$的圆柱面与平行于$xoy$坐标面、距离等于$z$（常数）的平面的交线（图3—47）。

3．当$\begin{cases}\theta \text{ 为常数}\\ z \text{ 为常数}\end{cases}$时，表示起点在$z$轴、与$xoy$坐标面平行且距离为$z$（常数）的射线$l$，它是过$z$轴与$xoz$坐标面夹角为$\theta$的半平面和与$xoy$坐标面平行的平面的交线（图3—48）。

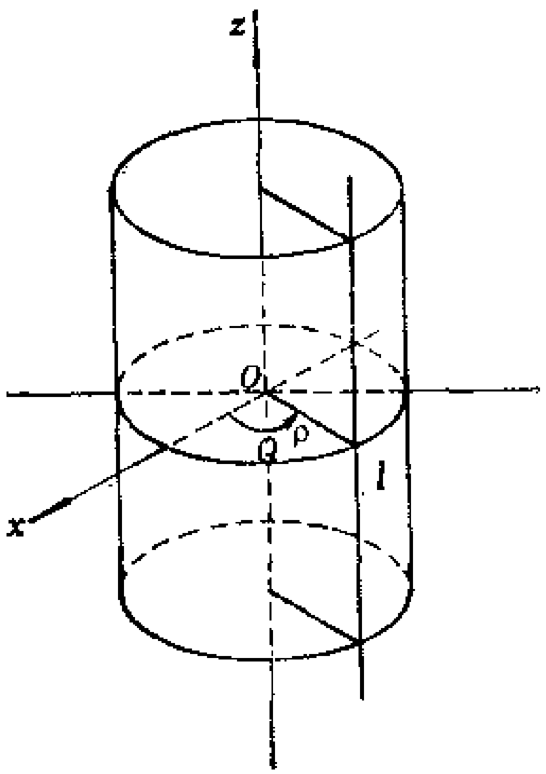


图 3—46

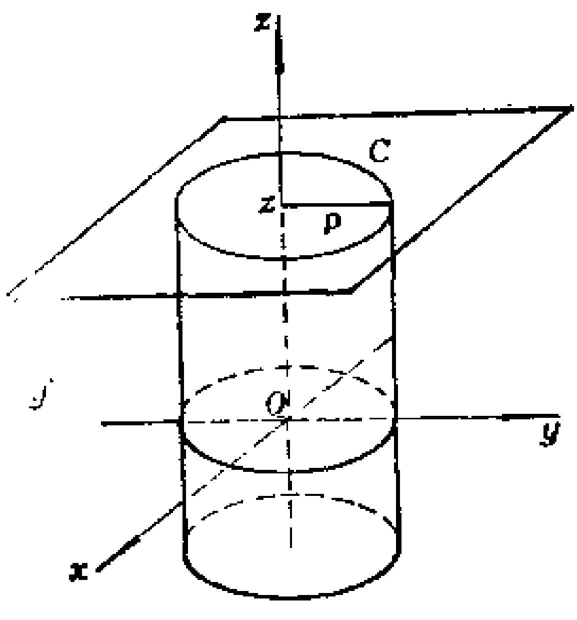


图 3—47

问：如何用柱面坐标表示球Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$？

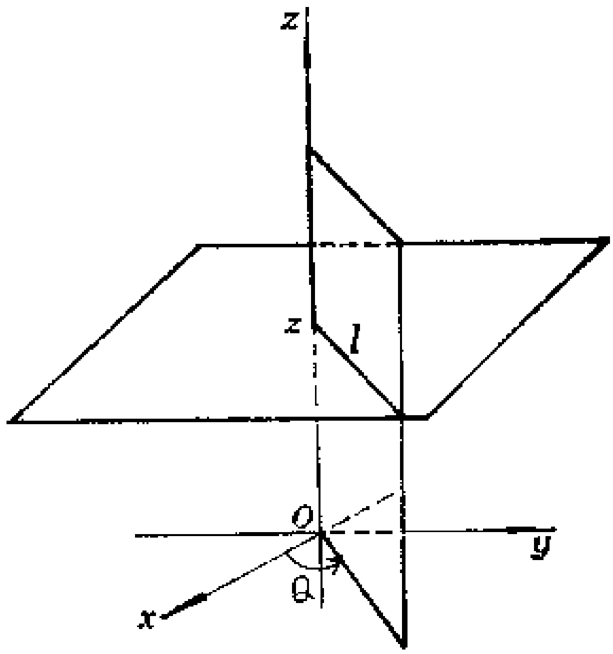


图 3—48

答：如图3—49所示，球Ω在 xoy坐标面的投影为圆闭域D，用极坐标表示为：

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\\0\leqslant\rho\leqslant a.\end{cases}$$

$\because$ Ω的上半球面方程为：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

Ω的下半球面方程为：$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

$\therefore$ 变量z的变化范围为：$-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

即 $-\sqrt{a^2-\rho^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-\rho^2}$.

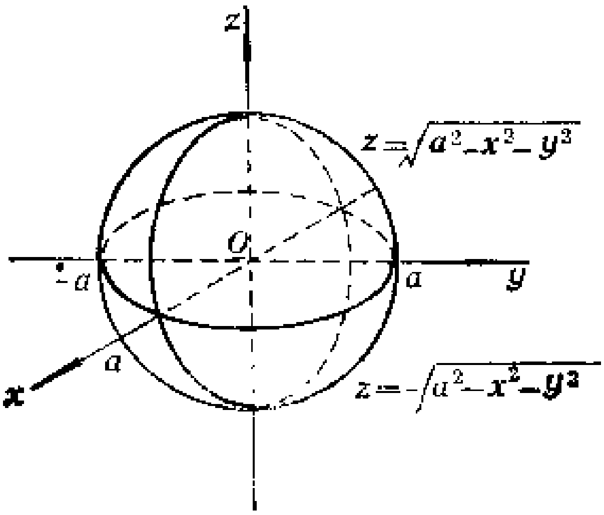


图 3—49

∴　用柱坐标表示Ω为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\theta\leqslant a,\\ -\sqrt{a^2-\rho^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-\rho^2}.\end{cases}$$

问如何用柱面坐标表示由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面 $z=1$ 所围成的立体V？

答：如图3—50所示，立体V在xoy坐标面的投影为圆域D：

$$x^2+y^2\leqslant 1.$$

用极坐标可表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\rho\leqslant 1.\end{cases}$$

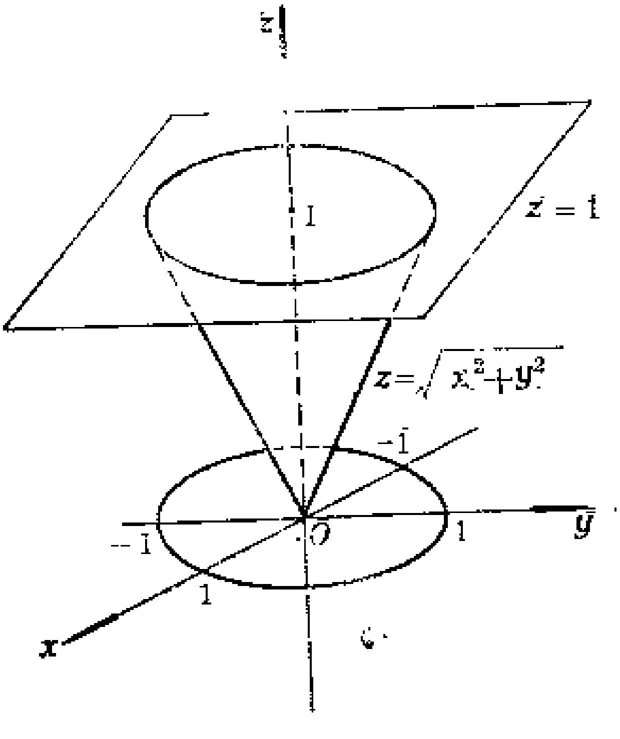


图 3—50

$$\because\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z=1,$$

∴　用柱坐标表示V为

$$V:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\\ \rho\leqslant z\leqslant 1.\end{cases}$$

问：如何应用柱面坐标计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$？

答： 1．应用柱坐标计算三重积分的步骤为：

（1）将积分区域Ω转化为柱坐标形式．

（2）将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$转化为柱坐标形式，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\ z\ )\rho d\theta d\rho dz.$$

（3）应用累次积分法计算柱坐标形式的三重积分．

2．在应用柱坐标计算三重积分时，应注意下面三点：

（1）一般来说，积分区域Ω的投影域为圆域时，应用柱坐标计算比较方便．

（2）在计算过程中，千万不要丢掉被积表达式中的因子“ρ”

（3）在化为累次积分时，要注意积分顺序．

问：如何用柱面坐标计算三重积分：$I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$？

其中Ω由圆锥面$x^2+y^2=z^2$和平面$z=1$围成．

答： 如图3—49所示，闭域Ω表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\0\leqslant\rho\leqslant 1,\\\rho\leqslant z\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\because I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

$$=\iiint_{\Omega} z\cdot\rho\cdot\rho\, d\rho d\theta dz$$

$$=\iiint_{\Omega} z\cdot\rho^2\cdot d\rho d\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho^2 d\rho\int_\rho^1 zdz$$

$$=2\pi\int_0^1 \rho^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_\rho^1 d\rho$$

$$=\pi\int_0^1(\rho^2-\rho^4)d\rho$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{2\pi}{15}.$$

问：如何利用柱面坐标计算三重积分：$I=\iiint_{\Omega} zdxdydz$？其中Ω是圆柱面 $x^2+y^2-2x=0$，平面 $z=0$和$z=a(a>0)$ 在第一

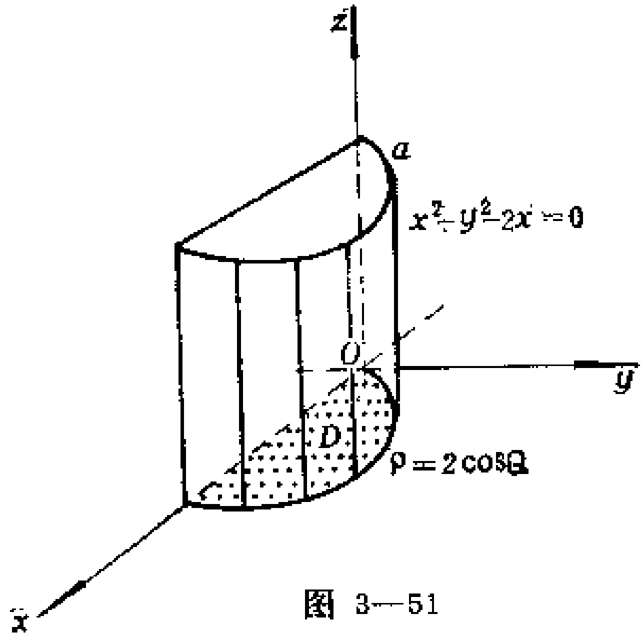


图 3—51

卦限内围成的区域。

答：首先画出空间闭域Ω（图3—51）。

从图3—50可知，变量z的变化范围为：$0\leqslant z\leqslant a$。立体Ω在xoy坐标面的投影域为半圆闭域D，且

$$D:\begin{cases}0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

∴　积分区域Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant a,\\ 0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\,d\rho\int_0^{a}z\,dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\Big[z^2\Big]_0^{a}d\rho$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}a^2.$$

八、应用球面坐标计算三重积分

问：什么是球面坐标？球面坐标与直角坐标有什么关系？

答： 如图3-52所示，若点$M(x, y, z)$为空间直角坐标系中任意一点，作MP垂直于xoy坐标面且相交于点$P(x, y)$，连结OM与OP，记$|OM|=r$，从正z轴来看，自x轴按逆时针旋转到OP的角度记为φ，显然有：$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，将自$z$轴转到$OM$的角度记为$\theta$，这里，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$（图3—51）。

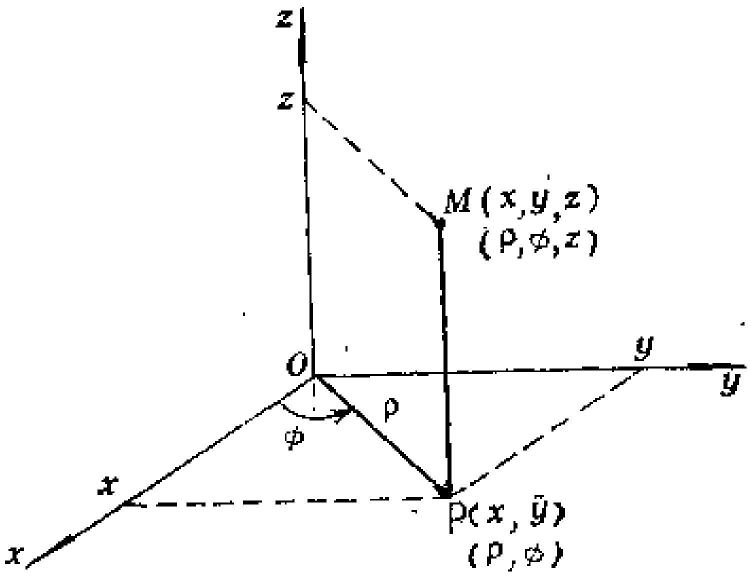


图 3—52

这样，对于空间任意点$M(x, y, z)$，就唯一的对应一组数(r, φ, θ)；反之，给出这样的一组有次序的数组(r, φ, θ)，就有唯一的空间点M与之对应。我们称有序数组(r, φ, θ)为空

间点M的球面坐标。

从图3--51可以直接推出球面坐标与直角坐标有如下关系：

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta; \end{cases} \quad 或 \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}, \\ \cos\theta=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$$

问：在球坐标系中，当r,φ,θ分别为常数时，各表示什么图形？

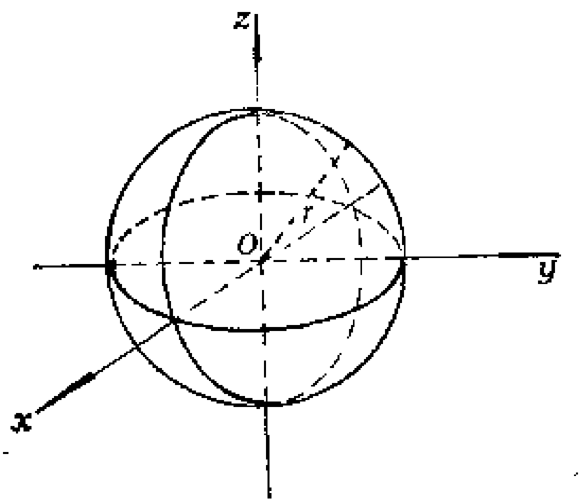


图 3—53

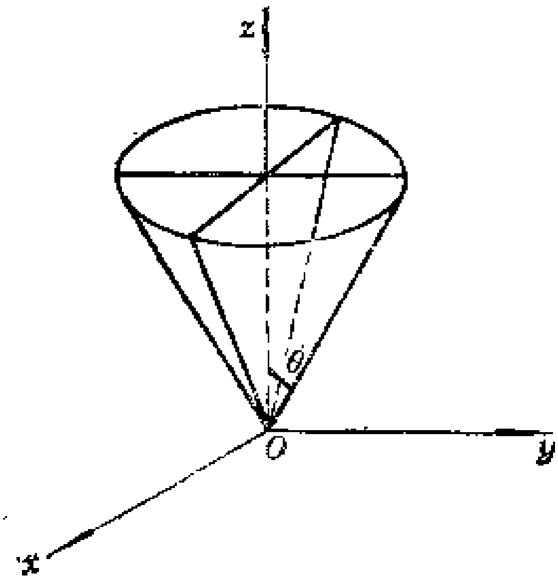


图 3—54

答： 1. 当r为常数时，表示以原点为球心，r为半径的球面（图3－53）。

2. 当θ为常数时，表示以原点为顶点，z轴为中心轴，半顶角为θ的圆锥面（图3—54）。

3 当φ为常数时，表示过z轴的半平面（图3—55）。

以上三种曲面称为球坐标曲面。

问：在球坐标系中，当$\begin{cases} r为常数 \\ \varphi为常数 \end{cases}$，$\begin{cases} r为常数 \\ \theta为常数 \end{cases}$或$\begin{cases} \varphi为常数 \\ \theta为常数 \end{cases}$时，各表示什么图形？

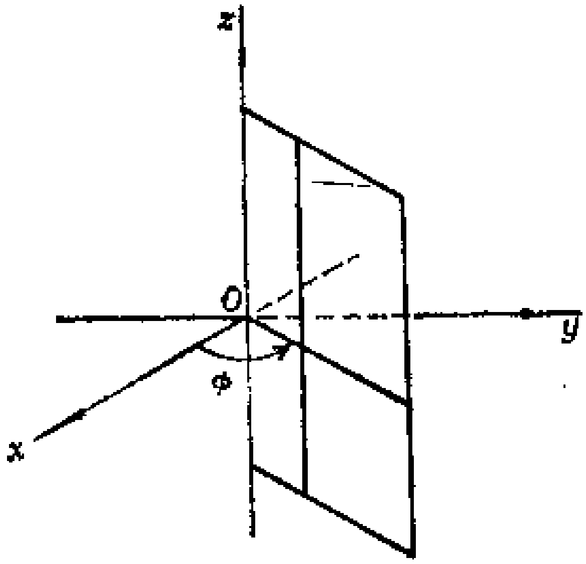


图 3—55

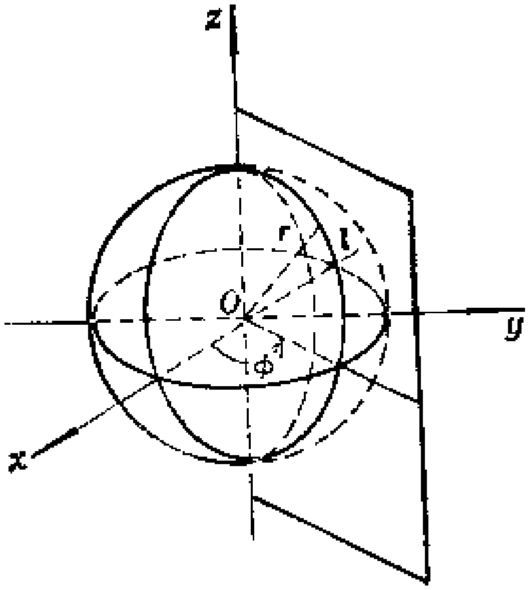


图 3—56

答：1．当$\begin{cases} r\text{为常数} \\ \varphi\text{为常数} \end{cases}$时，表示以原点为球心，以 r 为半径的球面和过 z 轴的半平面的交线 l（图3—56）。

2．当$\begin{cases} r\text{为常数} \\ \theta\text{为常数} \end{cases}$时，表示以原点为顶点，$z$ 轴为中心轴，半顶角为 θ 的圆锥面和以原点为球心，r为半径的球面的相交曲

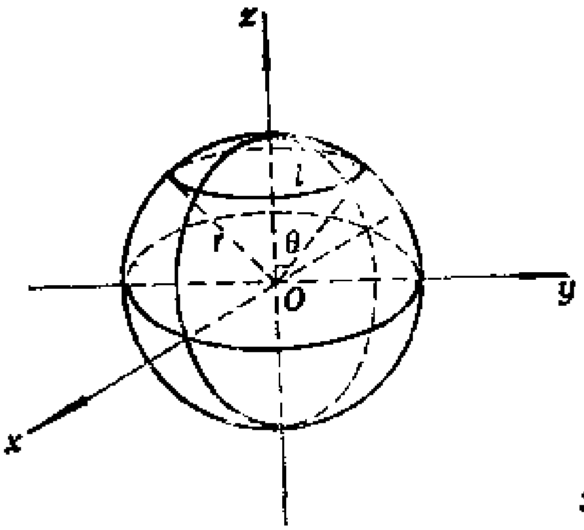


图 3—57

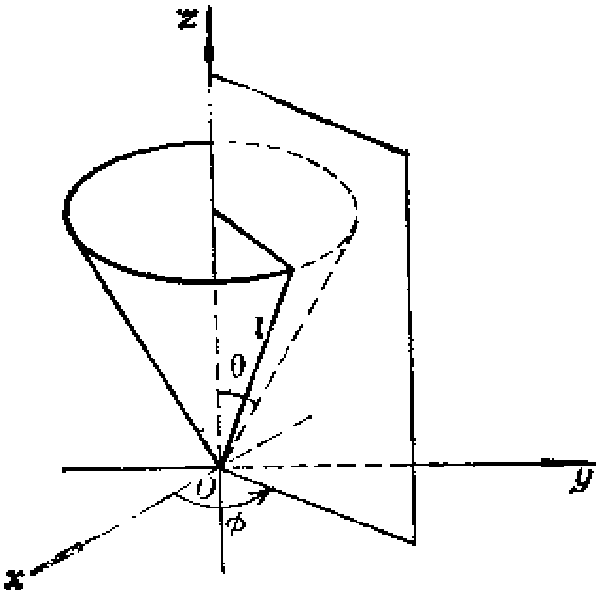


图 3—58

线。这条曲线是圆心在z轴且与xoy坐标面平行的圆l(图3—57)，

3．当$\begin{cases}\theta\text{为常数}\\ \varphi\text{为常数}\end{cases}$时，表示过$z$轴的半平面和以原点为顶点，$z$轴为中心轴，半顶角为$\theta$的圆锥面的交线。这是一条以原点为端点与$z$轴夹角为$\theta$的射线$l$(图3—58)。

问：如何应用球坐标计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$？

答： 1．将积分区域Ω用球坐标表示。

2．将被积函数$f(x,y,z)$中的x、y、z分别用$x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$代换。

3．将体积元素dV换为球坐标系中的体积元素，即

$$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

4．应用累次积分法进行计算。

问：如何应用球坐标计算半径为R的球体体积？

答： 我们知道，三重积分中当被积函数$f(x,y,z)=1$时，其积分值就是积分区域Ω的体积，即

$$V=\iiint\limits_{\Omega} dV=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

从图3—59中可以看出，当球心在原点时，积分区域Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant R,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$\therefore\quad V=\iiint\limits_{\Omega} dV$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\sin\theta dr$$

$$=\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^R d\varphi$$

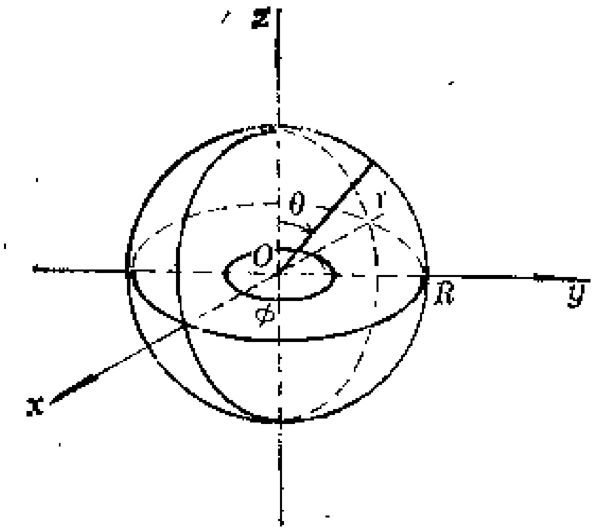


图 3—59

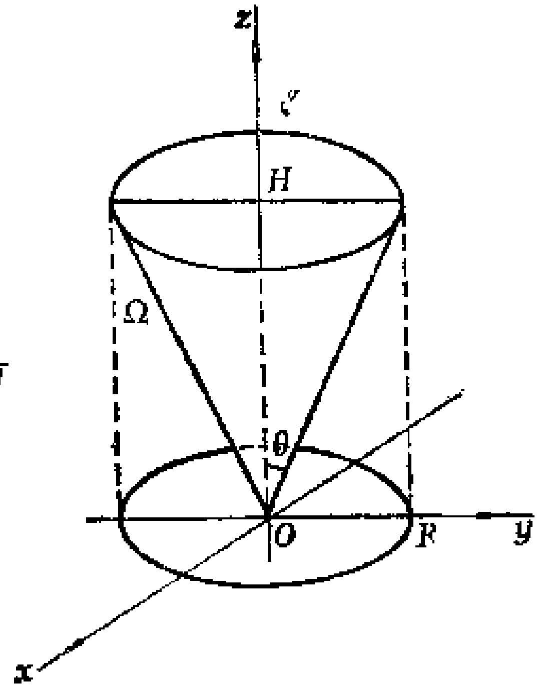


图 3—60

$$=\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi R^3\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{3}R^3(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

问：设 Ω 为图3—60的圆锥域，如何将三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$ 化为球坐标系中的累次积分？

答： 首先用球坐标表示积分域Ω.

$\because$ $z=H$，又 $z=r\cos\theta$，

$\therefore$ $r\cos\theta=H$，则 $r=H\cdot\sec\theta$.

$\because$ $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，

$$\therefore \qquad \Omega: \begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant H\sec\theta, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$= \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{H\sec\theta} f(r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr.$$

九、三重积分的应用

问：三重积分在物理上有哪些应用？

答： 三重积分的应用是比较广泛的．下面仅举出在物理上三方面的应用

1．非均匀物体的质量

若空间物体Ω的密度函数为$\mu(x,y,z)$ 时，该物体的质量为

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dV.$$

2．物体的质量中心

若空间物体Ω的密度函数为$\mu(x,\ y,\ z)$，则该物体的质量中心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\,\mu(x,\ y,\ z)dV}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dV},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} y\,\mu(x,\ y,\ z)dV}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dV},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\,\mu(x,\ y,\ z)dV}{\iiint\limits_{\Omega} \mu(x,\ y,\ z)dV}.$$

3．转动惯量

空间物体Ω的密度函数为$\mu(x,\ y,\ z)$，则物体关于x轴的转动惯量为

$$J_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\ \mu(x,\ y,\ z)dV,$$

物体关于y轴的转动惯量为

$$J_y=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\ \mu(x,\ y,\ z)dV,$$

物体关于z转的转动惯量为

$$J_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\ \mu(x,\ y,\ z)dV,$$

物体关于原点的转动惯量为

$$J_o=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\ \mu(x,\ y,\ z)dV.$$

问：如何求椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（$\mu$为常数）的质量？

答：由椭球的对称性及密度函数为常数，可先求出第一卦限内椭球的质量，再乘以8即可。即

$$M=8\iiint\limits_{\Omega}\mu dV=8\mu\iiint\limits_{\Omega}dV.$$

其中Ω为椭球在第一卦限的体积（图3—61）。

$\because$变量z的变化范围为：$0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$，

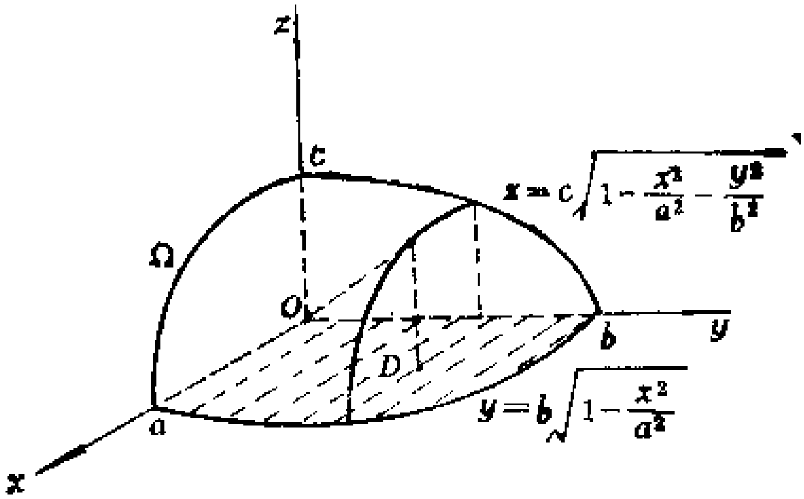


图 3—61

变量y的变化范围为：$0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$，

变量x的变化范围为：$0\leqslant x\leqslant a$，

∴　积分区域Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\\ 0\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\\ 0\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

$$\therefore\quad M=8\mu\iiint\limits_{\Omega}dV$$

$$=8\mu\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dy\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz$$

$$=8\mu c\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.$$

在对y的积分中，令$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sin t$。$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$，

则　$dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t\,dt$，

$$\therefore \quad M=8\mu c\int_0^a dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\cos t dt$$

$$=8\mu c\int_0^a dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\sin^2 t+\frac{x^2}{a^2}\sin^2 t}\cdot$$

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t dt$$

$$=8\mu c\int_0^a dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(1-\sin^2 t)-(1-\sin^2 t)\frac{x^2}{a^2}}\cdot$$

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t dt$$

$$=8\mu cb\int_0^a dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos^2 t dt$$

$$=8\mu bc\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$$

$$=2\mu bc\pi\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\mu bc\pi\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a$$

$$=2\mu bc\pi\frac{2a}{3}$$

$$=\frac{4}{3}\mu bca\pi.$$

问：如何求由 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant 1$ 表示的正方体 Ω 关于 z 轴的转动惯量（$\mu=1$）？

答： ∵积分区域 Ω 可表示为

$$\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant 1,\\0\leqslant y\leqslant 1;\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\therefore\qquad I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2+y^2)\,dz$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}.$$

问：如何计算三重积分：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV$？其中Ω为球面$z=\sqrt{A^2-x^2-y^2}$和$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(A>a>0)$及平面$z=0$围成的区域。

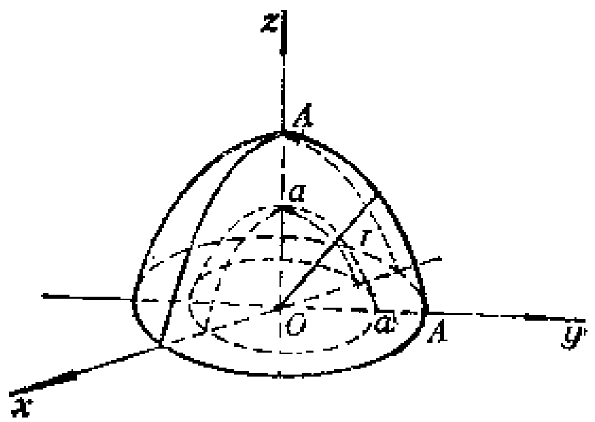


图 3—62

答：从图3-62可知，应用球面坐标将Ω表示为

$$\Omega:\begin{cases}a\leqslant r\leqslant A,\\0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

$$\therefore \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)$$

$$r^2\sin\theta d\varphi d\theta dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^A r^4\sin^3\theta dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta\int_a^A r^4 dr$$

$$=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)$$

$$\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta-\right.$$

$$\left.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\left[-\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

十、小　　结

这一章我们学习了二重积分、三重积分的概念、计算及应用。

1．所谓重积分就是多元函数的积分．其主要特点在于被积

函数是二元（二重积分）、三元（三重积分）函数；积分区域为平面闭域或空间闭域。

从概念上，我们可以用点函数的积分来概括重积分与定积分，即它们都是无穷小量之和的极限：$\int_{(w)} f(p)dw$。

（1）当P是数轴上的点，积分区域(w)为区间时，积分

$$\int_{(w)} f(p)dw \quad \text{就是定积分：} \int_a^b f(x)dx \text{。}$$

（2）当P是平面上的点，积分区域(w)为平面区域D时，积分

$$\int_{(w)} f(p)dw \quad \text{就是二重积分：} \iint_D f(x,\ y)dxdy.$$

（3）当P是空间上的点，积分区域(w)为空间区域Ω时，积分

$$\int_{(w)} f(p)dw \text{ 就是三重积分：} \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz.$$

2．重积分的计算主要是通过“累次积分”解决的．即将重积分转化为定积分去计算．正确地计算重积分是本章的重点，初学者应注意下面几点：

（1）在计算重积分之前，比较准确地画出平面闭域D或空间闭域Ω，这不仅可以帮助我们了解立体的特点，而且可以帮助我们确定积分限．这就需要将空间解析几何知识予以灵活应用．

（2）正确地用不等式组表示积分区域是计算重积分很重要的一步．在这一过程中，可以根据积分特点考虑积分顺序，并具体地定出积分限．

（3）合理地选择极坐标、柱面坐标、球面坐标常可以简化重积分的计算．应注意的是：首先根据积分区域的特点正确地选择哪种坐标，然后再根据直角坐标与上述坐标的关系，将积分区域与被积表达式正确地表示出来．

十一、思考练习题

1. 求下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$，其中$D$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$．

(2) $\iint\limits_D x\sin y\,dxdy$，其中$D$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$．

(3) $\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy$，其中$D$：圆$x^2+y^2\leqslant 1$的上半部分。

2．求由旋转抛物面$z=x^2+y^2$、柱面$x^2+y^2=1$和xoy坐标面围成的立体体积．

3．用不同的积分顺序计算二重积分：$\iint\limits_D\sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$，

其中　D：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\0\leqslant y\leqslant x.\end{cases}$

4．求下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega xydxdydz$，其中$\Omega$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$-2\leqslant y\leqslant 1$，

$0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2}$．

(2) $\iiint\limits_\Omega\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中$\Omega$：$1\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 2$，

$1\leqslant z\leqslant 2$，

(3) $\iiint\limits_\Omega y\cos(z+x)dxdydz$，其中$\Omega$：由抛物柱面$y=\sqrt{x}$

及平面$y=0$，$z=0$，$x+z=\frac{\pi}{2}$所围成的区域.

（4）$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,dxdydz$，其中$\Omega$：球面$x^2+y^2+z^2=1$及平面$x=0$，$y=0$，$z=0$围成的第一卦限内的区域.

（5）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$：半球面$z=\sqrt{A-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$（$A>a>0$）及平面$z=0$围成的区域.

十二、思考练习题答案或提示

1. （1）$(e-1)^2$，

   （2）$\frac{3}{2}$

   （3）$\frac{16}{45}$.

2. $\frac{\pi}{2}$.

3. $\frac{\pi}{12}$.

4. （1）$-\frac{9}{8}$，

   （2）$\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$，

   （3）$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$，

   （4）$\frac{1}{48}$，

   （5）$\frac{4\pi}{15}(A^2-a^2)$.

第四章　曲线积分与曲面积分

我们知道，定积分的积分区间为数轴上的直线段闭区间，二重积分与三重积分的积分区域则为平面闭域与空间闭域。本章所要研究的曲线积分，其积分区域为平面或空间的曲线段，曲面积分的积分区域则是空间曲面。我们将会看到，曲线积分与曲面积分的计算最后将归结为定积分与重积分的计算。因此，在学习本章时，除应注意曲线积分与曲面积分本身的特点之外，还应注意它们与定积分、重积分的联系。

学习本章的要求：

1．理解对弧长与对坐标的曲线积分的概念，熟练掌握其计算方法。

2．熟练掌握曲线积分与路线无关的条件

3．熟练掌握格林公式，并能正确运用。

4．理解对面积与对坐标的曲面积分的概念，掌握其计算方法。

5．掌握奥斯特洛格拉特斯基公式并会运用。

本章的重点是：掌握曲线积分与曲面积分的计算方法。

一、对弧长的曲线积分及计算

问：曲线积分、曲面积分的特点是什么？它们与定积分，重积分有什么联系和区别？

答：曲线积分和曲面积分的特点主要体现在积分区域上。曲线积分的积分区域在曲线上（包括平面曲线和空间曲线），曲面积分的积分区域在空间曲面上。

我们知道，定积分的积分区域是数轴上的闭区域，重积分的

积分区域是平面闭域或空间闭域，所以，曲线积分、曲面积分与定积分、重积分在积分区域上是不同的，由此决定了它们在数学意义上也有明显的差别。但曲线积分、曲面积分的定义方法、基本性质都与定积分、重积分有相似之处，特别是曲线积分与曲面积分的计算，都是通过转化为定积分、重积分完成的。

问：曲线积分对积分区域有什么要求？

答： 在研究曲线积分的时候，一般要求作为积分区域的曲线（包括平面曲线或空间曲线）是分段光滑的。也就是说，这样的曲线是由有限个具有连续转动切线的弧所连接起来的，连接点可能是角点。例如，矩形的边界曲线是分段光滑的，而矩形的四个顶点（即各段曲线的连接点）是角点（图4—1）；扇形的边界曲线也是分段光滑的，其中原点和半径与圆弧的交点是角点（图4—2）。

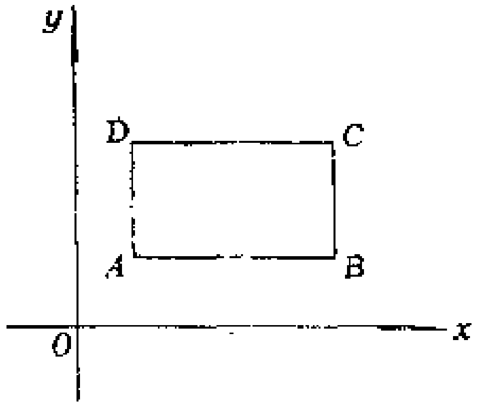


图 4—1

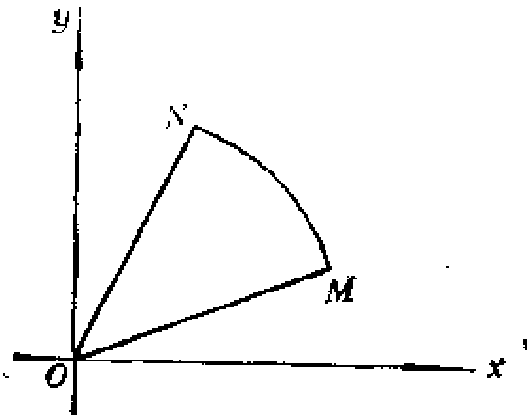


图 4—2

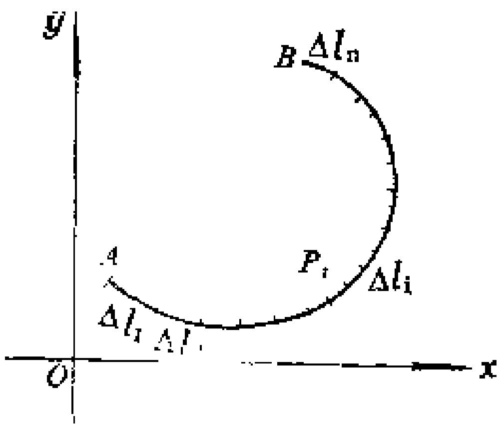


图 4—3

问：如何计算质量分布不均匀的平面曲线的质量？

答： 设xoy平面上有一曲线段$\widehat{AB}$（图4—3），在该曲线上不同的点质量密度不一样。设曲线段$\widehat{AB}$上任意一点$p(x, y)$处的线密度为$\rho(x, y)$，我们

用“分割、求和、取极限”的方法求曲线段$\overset{\frown}{AB}$的质量。

1．用任意的分法将$\overset{\frown}{AB}$分割为n个小弧段：

$$\Delta l_1,\ \Delta l_2,\ \cdots,\ \Delta l_i,\ \cdots,\ \Delta l_n,$$

我们也用Δl_i（$i=1,2\cdots,n$）表示各小弧段的长度。

2．在小弧段Δl_i（$i=1,2,\cdots,n$）上任取一点$p_i(\xi_i,\ \eta_i)$，该点的质量密度为$\rho_i(\xi_i,\ \eta_i)$。当分法很细时，Δl_i很小，我们可以近似认为在Δl_i上各点的密度不变，都是$\rho_i(\xi_i,\ \eta_i)$，则小弧段Δl_i的质量为

$$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\ \eta_i)\cdot\Delta l_i\ （i=1,2,\cdots,n）.$$

3．整个曲线段$\overset{\frown}{AB}$的质量可以近似表示为

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta l_i.$$

4．当分点无限增多，分法无限细密时，最大的小弧段$\max\{\Delta l_i\}\to 0$（$i=1,2,\cdots,n$），此时，若极限

$$\lim_{\max\{\Delta l_i\}}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta l_i$$

存在，则该极限值就是曲线段$\overset{\frown}{AB}$的质量M，即

$$M=\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta l_i.$$

问：对弧长的曲线积分及应注意的问题是什么？

答：抽去平面曲线质量的实际意义，就可以得到对弧长的曲线积分的意义。

设函数$f(x,\ y)$是定义在xoy平面曲线段l上的连续函数，以任意的分法将曲线段l分成n个小段$\Delta l_i(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小弧段$\Delta l_i$上任取一点$P_i(\xi_i,\ \eta_i)$，与该点对应的函数值为$f(\xi_i,\ \eta_i)$。当分法无限细密时，即$\max\{\Delta l_i\}\to 0(i=1,2,\cdots,n)$时，和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i \eta_i) \Delta l_i$$

的极限存在，则称该极限值为函数$f(x, y)$在平面曲线段l上对弧长的曲线积分。记为

$$\int_l f(x, y)\, dl = \lim_{\max\{\Delta l_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

其中，曲线段l称为积分路径（积分曲线），函数$f(x, y)$称为被积函数，dl称为弧微分，$f(x, y)dl$称为被积表达式。

从对弧长的曲线积分的定义中可以看出，对弧长的曲线积分与定积分的定义方法相同，都是通过"分割、求和、取极限"的方法、所不同的是，定积分是在数轴上的直线段(区间)上进行分割，而对弧长的曲线积分则是在平面曲线段上进行分割。

另外，在定积分的分割中，$\Delta x_i (i=1,2,\cdots,n)$ 可正可负，当分割沿x轴正向进行时，$\Delta x_i>0$；当沿x轴负向分割时：$\Delta x_i<0$。因此，定积分与积分区间的方向有关，而对弧长的曲线积分则不同，由于我们是对平面曲线的弧长进行分割，所以，不论沿曲线l的哪个方向分割，各小弧段$\Delta l_i (i=1,2,\cdots,n)$都表示各小弧段的长度。总有$\Delta l_i>0$，即$dl>0$。因此，对弧长的曲线积分与积分路径的方向无关。

例如，平面上曲线段$\overset{\frown}{AB}$以A为起点，B为终点进行分割时，有$\Delta l_i>0 (i=1,2,\cdots,n)$（图 4－3）；若以$B$为起点，$A$

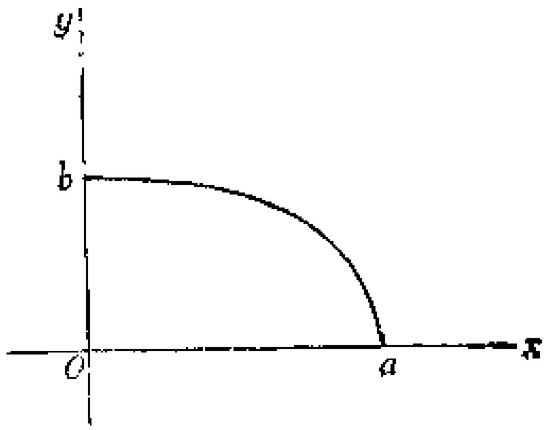


图 4—4

为终点进行分割时，同样有$\Delta l_i>0$（图4—4）．所以

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dl=\int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,dl.$$

问：如何计算对弧长的曲线积分？

答：对弧长的曲线积分的计算是通过将其转化为定积分完成的。

下面分三种情况进行研究：

1．如果积分曲线 l 用参数方程表示，即

$$l:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_1),$$

$\varphi(t)$与$\phi(t)$在(t_0,t_1)上有连续导数，当 t 从 t_0变到 t_1 时，曲线 l 上的点经过的曲线为 l，且$t=t_0$，$t=t_1$，分别对应曲线 l 的两个端点。

$\because\quad dl=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt,$

$$\therefore\quad \int_l f(x,y)\,dl=\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt.$$

具体的计算步骤为：

（1）根据曲线 l 的端点确定参数 t 的变化范围，从而确定定积分的积分限。为了保证$dl>0$，应注意积分上限大于积分下限。

（2）将被积函数$f(x,y)$用$x=\varphi(t)$，$y=\phi(t)$代换。

（3）将弧微分dl换为$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt$。

（4）计算定积分

$$\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt.$$

例如，积分曲线 l 为椭圆$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$在第一象限内的弧段 l，试计算对弧长的曲线积分：$I=\int_l xy\,dl$。

解：如图 4 — 5 所示，参数t的变化范围为$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$。

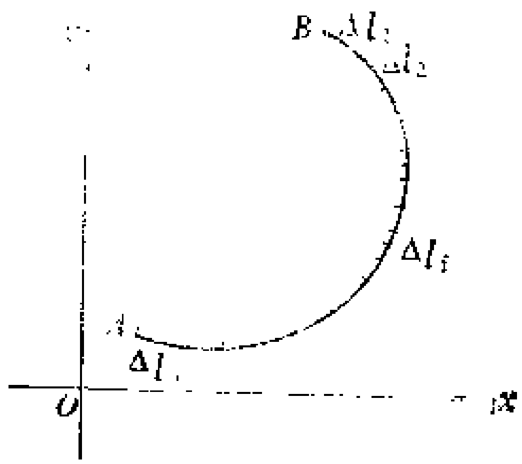


图 4—5

又 ∵ $f(x, y)=xy=ab\sin t\cos t,$

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt,$$

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt.$$

令 $\cos 2t=z$，则$\sin 2t\cdot dt=-\frac{1}{2}dz$，且当$t=0$时，$z=1$；当$t=\frac{\pi}{2}$时，$z=-1$。

$$\therefore\quad I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}\,dz$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

2．如果积分曲线 l 用方程 $y=f(x)$表示（$a\leqslant x\leqslant b$），且$f(x)$在$[a, b]$上具有连续导数，当$x=a$，$x=b$时分别对应于曲线

l 的两个端点。

$\because \quad dl=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$,

$\therefore \quad I=\int_l f(x,y)dl=\int_a^b f[x,f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

例如，积分曲线 l 为曲线 $xy=1$ 从点 $A\left(\frac{1}{2},2\right)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧，计算：

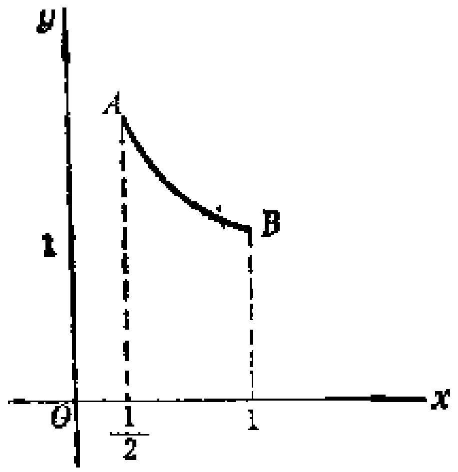


图 4—6

$$I=\int_l x^6 y dl.$$

解：如图 4—6 所示，x 的变化范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

$\because \quad f(x,y)=x^6y=x^6\frac{1}{x}=x^5$,

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}dx,$$

$$\therefore \quad I=\int_l x^6 y dl$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^5\cdot\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+x^4}\,d(1+x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{8}-\frac{17\sqrt{17}}{64}\right).$$

3．如果积分曲线 l 用方程 $x=\psi(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$ 表示，$x=\psi(y)$ 在 (c, d) 上有连续导数，且当 $y=c$, $y=d$ 时分别对应于曲线 l 的两个端点，则

$$I=\int_l f(x, y)dl$$

$$=\int_c^d f[\psi(y), y]\cdot\sqrt{1+[\psi'(y)]^2}\,dy.$$

例如，积分曲线 l 为曲线 $y^2=4x$ 从点 $A(0,0)$ 到 $B(1,2)$ 的一段弧，计算：$I=\int_l ydl$.

解：$\because$ y 的变化范围为 $[0, 2]$,

又 $\because$ $x=\frac{1}{4}y^2$,

则 $dl=\sqrt{1+\left[\left(\frac{y^2}{4}\right)'\right]^2}\,dy=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dy=\frac{1}{2}\sqrt{4+y^2}dy.$

$\therefore$ $I=\int_l ydl$

$$=\int_0^2 y\frac{1}{2}\sqrt{4+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\sqrt{4+y^2}d(4+y^2)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{6}\left(8^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

问：下面的计算对吗？为什么？

计算： $I=\int_l (x+y)dl$，其中 l 为以 $O(0,0)$，$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形（图4—7）.

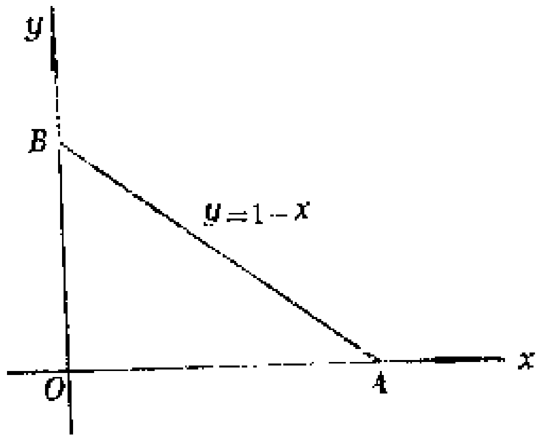


图 4—7

解： 如图 4 — 7 所示，曲线积分

$$\int_l (x+y)dl=\int_{OA}(x+y)\,dl+\int_{AB}(x+y)dl+\int_{BO}(x+y)dl.$$

在线段OA上，有$y=0$，$x=x$且$0\leqslant x\leqslant 1$，$\therefore dl=dx$. 在线段AB上，有 $y=1-x$, $x=x$，且自变量x由 1 变到0，$\therefore dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx$。

在线段BO上，有$y=y$，$x=0$，且y由 1 变到 0，

$\therefore\quad dl=dy$.

综上所述，有

$$\begin{aligned}
I&=\int_l (x+y)dl\\
&=\int_{OA}(x+y)dl+\int_{AB}(x+y)dl+\int_{BO}(x+y)dl\\
&=\int_0^1 xdx+\int_1^0[x+(1-x)]\sqrt{2}\,dx+\int_1^0 ydy\\
&=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\sqrt{2}x\right|_1^0+\left.\frac{1}{2}y\right|_1^0\\
&=-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

答：上面的计算不对。因为对弧长的曲线积分必须保证$dl>0$，为此，在确定积分限时应注意下限小于上限。由于对弧长的曲线积分与积分路径的方向无关，故可将不符合上述要求的积分上、下限对调，以保证$dl>0$。

$$\therefore\quad I=\int_l (x+y)dl$$

$$=\int_{OA}(x+y)dl+\int_{AB}(x+y)dl+\int_{BO}(x+y)dl$$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1 [x+(1-x)]\sqrt{2}\,dx+\int_0^1 ydy$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}$$

$$=1+\sqrt{2}.$$

问：当曲线积分的积分路径l为：

1．$y=x^2$上从原点到$B(1,1)$之间的一段弧．

2．由折线OAB组成，其中$A(1,0)$，如图4—8所示．分别计算对弧长的曲线积分：$I=\int_l xdl$．从计算的结果可以得到什么有益的结论？

答：1．$\because\ y=x^2$ 且 $0\leqslant x\leqslant 1$，

$$\therefore\quad I=\int_l xdl$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)$$

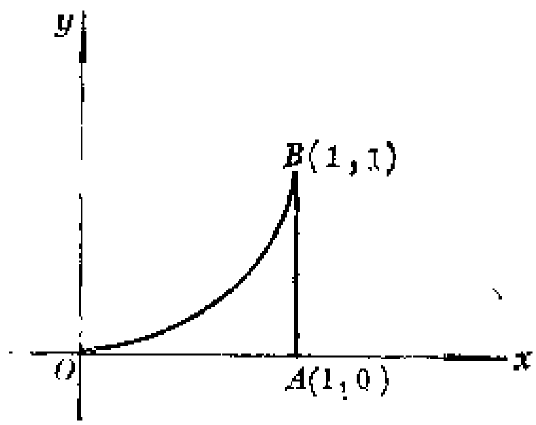


图 4—8

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

2. ∵折线OAB由线段OA、AB组成，

又∵在线段OA上，有$y=0$, $dl=dx$，在线段AB上，有$x=1$, $dl=dy$,

$$\therefore\quad I=\int_l xdl$$

$$=\int_{OAB} xdl$$

$$=\int_{OA} xdl+\int_{AB} xdl$$

$$=\int_0^1 xdx+\int_0^1 dy$$

$$=\frac{3}{2}.$$

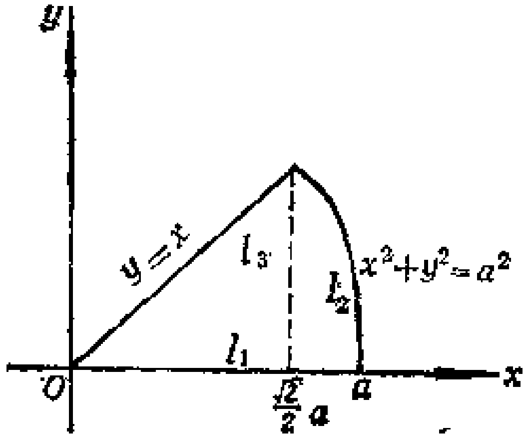


图 4—9

由此题可以看出，对弧长的曲线积分虽然与积分路径的方向无关，但当积分路径的起、终点确定后，曲线积分的值一般随积分路径的不同而不同。因此，对弧长的曲线积分在一般情况下与积分路径有关。

问：如何计算曲线积分：$I=\int_l e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$？其中$l$为圆周$x^2+y^2=a^2$、直线$y=x$及$x$轴在第一象限所围成的封闭曲线（图4—9）。 **答：**如图4—9所示，积分曲线l由下面三条曲线组成：

l_1：$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant a)$；

l_2：$x^2+y^2=a^2$ $\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\leqslant x\leqslant a\right)$；

l_3：$y=x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$.

$\because$ $I=\int_l e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$

$$=\int_{l_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl+\int_{l_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl+\int_{l_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl.$$

$\because$ 在l_1上，有$y=0$, $dl=dx$, $0\leqslant x\leqslant a$,

$\therefore$ $\int_{l_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl=\int_0^a e^x dx=e^a-1.$

$\because$ 在l_2上，有$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$ $\int_{l_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sqrt{(a\cos t)^2+(a\sin t)^2}}$

$$\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} ae^a dt$$

$$=\frac{\pi}{4}ae^a.$$

$\because$ 在l_3上，有$y=x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$\therefore$ $\int_{l_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{2}\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\,d(\sqrt{2}x)$$

$$=e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}$$

$$=e^a-1.$$

$\therefore$ $I=\int_l e^{\sqrt{x^2+y^2}}dl$

$$=(e^a-1)+\frac{\pi a}{4}e^a+(e^a-1)$$

$$=2(e^a-1)+\frac{\pi a}{4}e^a.$$

问：如何计算在空间曲线上对弧长的曲线积分？

答： 如果曲线 l 是一条空间曲线，$f(x, y, z)$ 是定义在曲线 l 上的函数，则对 l 采取"分割、求和、取极限"的方法，可得函数 $f(x,y,z)$ 沿空间曲线 l 上对弧长的曲线积分：

$$\int_l f(x, y, z)dl=\lim_{\max\{\Delta l_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \omega_i)\Delta l_i.$$

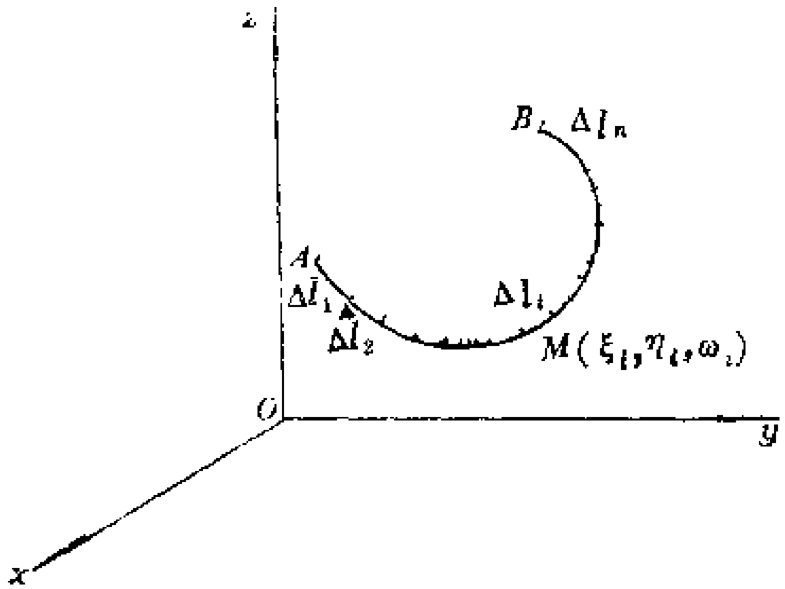


图 4—10

当空间曲线 l 的方程为：$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$, $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，且在区间$[\alpha, \beta]$上函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ 有连续导数，则有

$$\int_l f(x, y, z)dl=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]$$

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,dt.$$

在计算中为了保证$dl>0$，应注意$\alpha<\beta$。

例如，计算$I=\int_l (x^2+y^2+z^2)dl$，其中曲线l为$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$在区间$[0,2\pi]$上的一段。

解：∵ $dl=\sqrt{a^2\sin^2t+a^2\cos^2t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$，

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z)&=x^2+y^2+z^2\\
&=a^2\cos^2t+a^2\sin^2t+b^2t^2\\
&=a^2+b^2t^2。
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad I&=\int_l (x^2+y^2+z^2)dl\\
&=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt\\
&=\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+\frac{b^2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{2\pi}\\
&=2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right)。
\end{aligned}
$$

二、对坐标的曲线积分及计算

问：如何解决变力沿平面曲线上的作功问题？

答：定积分中我们解决了在变力（方向不变，大小改变）作用下，质点沿直线运动的作功问题，但在实际问题中，质点的运动常常不是直线运动而是曲线运动，同时外力也不仅改变力的大小而且也不断改变力的方向。这时在研究变力作功的问题时，应注意下面两个问题：

1．变力的大小与方向；

2．质点运动的曲线及方向。

为解决这一新的问题，我们考虑质点在变力$\boldsymbol{F}$作用下，沿曲

线l的起点A到终点B所作的功．首先对l作分割：从A到B分成n个有向小弧段Δl_1、Δl_2，…，Δl_k，…，Δl_n（图 4—11），它们的长度也用$\Delta l_k(k=1,2\cdots,n)$表示．然后在每个小弧段$\Delta l_k$上任取一点$M(\xi_k, \eta_k)$，有对应的力$\boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k)$，当$\Delta l_k$比较小时，可近似认为$\boldsymbol{F}$在$\Delta l_k$上不变，因此，变力$\boldsymbol{F}$在$\Delta l_k$上的功$\Delta W_k$可近似表示为

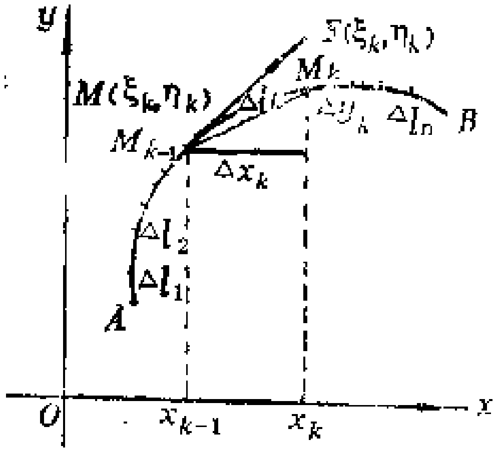


图 4—11

$$\Delta W_k \approx \boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \Delta \boldsymbol{l}_k.$$

由于Δl_k很短而且光滑，所以可用有向线段$\boldsymbol{M}_{k-1}\boldsymbol{M}_k$近似代替．即

$$\Delta \boldsymbol{l}_k \approx \boldsymbol{M}_{k-1}\boldsymbol{M}_k = \Delta x_k \vec{\boldsymbol{i}} + \Delta y_k \vec{\boldsymbol{j}}.$$

则力$\boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\boldsymbol{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\boldsymbol{j}$在小弧段$\Delta l_k$上作的功就可表示为

$$\begin{aligned}
\Delta W_k &\approx \boldsymbol{F}(\xi_k, \eta_k)\Delta \boldsymbol{l}_k \\
&= [P(\xi_k, \eta_k)\boldsymbol{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\boldsymbol{j}] \cdot (\Delta x_k \boldsymbol{i} + \Delta y_k \boldsymbol{j}) \\
&= P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.
\end{aligned}$$

所以，变力$\boldsymbol{F}$沿曲线l从点A到点B所作的功为：

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k].
\end{aligned}$$

当$\max\{\Delta l_k\} \longrightarrow 0$时，有

$$W = \lim_{\max\{\Delta l_k\} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right]$$

并记为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} Fdl.$$

应该注意的问题是，在求变力$\boldsymbol{F}$沿曲线l从A点到B点所作的功时，我们用到了$\boldsymbol{M}_{k-1}\boldsymbol{M}_k$在$x$轴和$y$轴上的投影$\Delta x_k$、$\Delta y_k$，而这两个量是可正可负的，因此，功$W$具有方向性，这是与前面求平面曲线质量时所不同的．一般来说，有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} dl=-F\int_{\overset{\frown}{BA}} Fdl.$$

问：对坐标的曲线积分及应注意的问题是什么？

答： 设xoy平面上的曲线l起点为A，终点为B，$P(x,y)$与$Q(x,y)$是定义在l上的连续函数．用任意的分法将曲线l由A到B分成n个有向小弧段Δl_k（它的长度也用Δl_k表示，$k=1,2,\cdots,n$），其中Δx_k、Δy_k为有向线段$\boldsymbol{M}_{k-1}\boldsymbol{M}_k$在$x$轴和$y$轴上的投影。

在Δl_k上任意取一点$M(\xi_k,\eta_k)$，对应有$P(\xi_k,\eta_k)$和$Q(\xi_k,\eta_k)$，当分法无限细密时（$\max\{\Delta l_k\}\to 0$），极限

$$I=\lim\sum_{k=1}^{n}[P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$$

如果存在，则将极限值I定义为函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$沿曲线l自A点到B点的对坐标的曲线积分，记为

$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

其中，A点为l的起点，B点为l的终点。

对坐标的曲线积分应注意下面两点：

1．被积函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$中的x、y并不是完全独立的，由于点$M(x,y)$在曲线l上，它们之间的关系由曲线l的方程决定，即

$$y=\varphi(x)\quad 或\quad x=\phi(y).$$

2．对坐标的曲线积分与积分路径l的方向有关，所以，对坐标的曲线积分一定要注明l的起、终点，一般有

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=-\int_{\widehat{BA}} P(x, y)dx+Q(x,y)dy.$$

问：对坐标的曲线积分有哪些基本性质？

答：对坐标的曲线积分一般有下面三条基本性质：

1. $\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_{\widehat{BA}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

2. $\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx$

$$+\int_{\widehat{AB}} Q(x, y)dy.$$

3. 若积分曲线 l 由l_1和l_2组成，则有

$$\int_{l} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

$$=\int_{l_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\int_{l_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

问：如何计算对坐标的曲线积分？

答：我们将对坐标的曲线积分转化为定积分来计算，下面分三种情况研究：

1．当积分曲线 l 由参数方程：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 表示，且 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 具有一阶连续导数，当 t 由 α 变到 β 时，平面对应点$M(x, y)$自 l 的起点 A 变到终点 B，则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t)], \psi[(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

这个公式表明，对坐标的曲线积分的计算步骤为：

（1）将被积表达式中的 x、y、dx、dy 顺次换为$\varphi(t)$，$\psi(t)$，$\varphi'(t)dt$，$\psi'(t)dt$。

（2）根据积分曲线 l 的起点A、终点B，得到变量大的变化范

围$[\alpha, \beta]$，并以α为定积分下限，β为定积分上限。应该注意的是，这里仅要求当$t=\alpha$时对应l的起点A，$t=\beta$时对应l的终点B，而不要求一定$\alpha<\beta$。

（3）计算关于变量t的定积分。

例如，计算$I=\int_{\widehat{AB}} xdy-ydx$，其中$\widehat{AB}$为半径为$a$，圆心在坐标原点的上半圆周，始点为$A(a, 0)$，终点为$B(-a, 0)$（图4—12）。

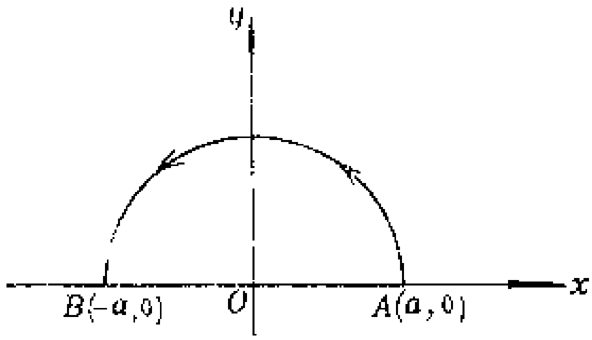


图 4—12

解：∵ 积分曲线$\widehat{AB}$的参数方程为

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,$$

其中$0\leqslant t\leqslant \pi$，且起点$A$对应$t=0$，终点$B$对应$t=\pi$。

$$\begin{aligned}\therefore\quad I&=\int_{\widehat{AB}} xdy-ydx\\&=\int_0^{\pi} a\cos t(a\sin t)'dt-a\sin t(a\cos t)'dt\\&=a^2\int_0^{\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt\\&=a^2\int_0^{\pi}dt\\&=\pi a^2.\end{aligned}$$

2．当积分曲线l由方程$y=f(x)$表示，其中当$x=a$时对应l的起点A，当$x=b$时对应l的终点B，则

$$I=\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ f(x)]+Q[x,\ f(x)]f'(x)\}dx.$$

这公式表明，当积分曲线 l 由 $y=f(x)$ 表示时，应分别将 y、dy 顺次换为 $f(x)$、$f'(x)dx$，并根据 l 的起点 A、终点 B 确定 x 的变化范围，并由此定出定积分的上、下限，最后计算定积分。

例如，计算 $I=\int_l\sqrt{y}dx$ 与 $I'=\int_l\sqrt{y}dy$，其中 l 为以原点为起点，以 B（1， 1）为终点的抛物线 $y=x^2$ 上的一段弧（图 4—13）。

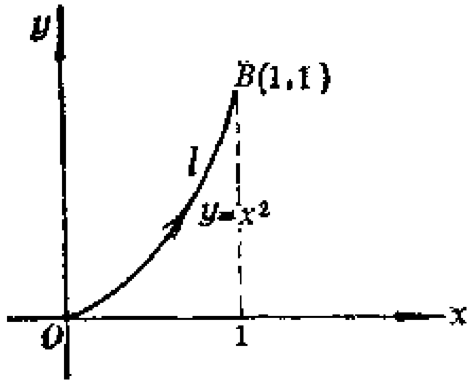


图 4—13

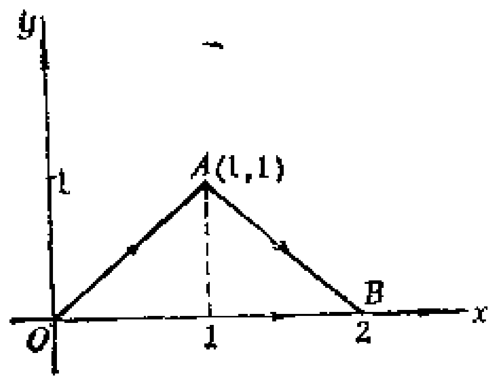


图 4—14

解： ∵积分曲线 l 的方程为 $y=x^2$，$0\leqslant x\leqslant 1$，

$$\therefore\quad I=\int_l\sqrt{y}dx=\int_0^1\sqrt{x^2}dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

$$I'=\int_l\sqrt{y}dy=\int_0^1\sqrt{x^2}2xdx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}.$$

3．读者可以自己练习写出积分曲线 l 由方程 $x=\phi(y)$ 表示时，对坐标的曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$$

的计算公式。

问：如何计算曲线积分：$I=\int_l (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$？其中 l 为：（1）折线 OAB；（2）直线段 OB（图4—14）。

答：（1）∵ $I=\int_l (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$

$$=\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$+\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy.$$

又∵ 在 OA 上，有，$y=x$，且 $0\leqslant x\leqslant 1$；

在 AB 上，有 $y=-x+2$，且 $1\leqslant x\leqslant 2$。

$$\therefore\quad I=\int_{OA}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$+\int_{AB}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^1[(x^2+x^2)+(x^2-x^2)]\,dx+\int_1^2\{[x^2+(-x+2)^2]$$

$$+[x^2-(-x+2)^2](-x+2)'\}dx$$

$$=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2(x-2)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

（2）∵ 在线段 OB 上，有 $x=x$，$y=0$，且 $0\leqslant x\leqslant 2$，

$$\therefore\quad I=\int_l (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\int_0^2 [(x^2+0)dx+(x^2-0)0]$$

$$=\int_0^2 x^2 dx$$

$$=\frac{8}{3}.$$

问：从上题的计算中，可以得到什么结论？

答：从上面问题可以看出，对坐标的曲线积分不仅与积分路线的起点和终点有关，一般地还与积分路线本身有关，即虽然起点、终点相同，但积分的路线不同，得到的积分值也不同。

问：如何计算曲线积分： $I=\int_l 2xydx+x^2dy$？

其中 l 为

（1）抛物线 $y=x^2$，从坐标原点到点 B（1，1）的一段弧；

（2）抛物线 $x=y^2$，从坐标原点到点 $B(1,1)$ 的一段弧；

（3）有向折线 OAB，其中三点坐标为：$O(0,0)$，$A(1,0)$，B（1，1）（图 4—15）。

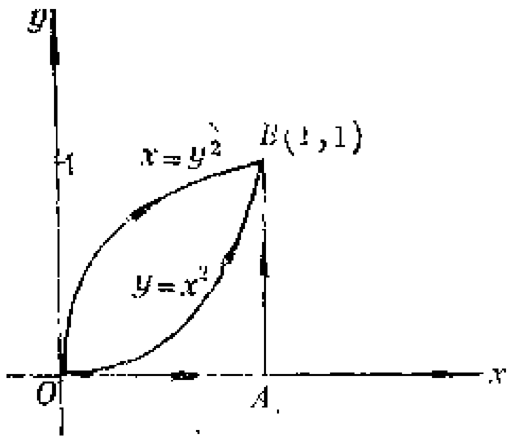


图 4—15

答：（1）$\because y=x^2$，且 $0\leqslant x\leqslant 1$，

$$\therefore\quad I=\int_l 2xydx+x^2dy$$

$$=\int_0^1 [2x\cdot x^2+x^2\cdot 2x]dx$$

$$=1.$$

（2）∵ $x=y^2$，且$0\leqslant y\leqslant 1$，

$$\therefore\quad I=\int_l 2xydx+x^2dy$$

$$=\int_0^1 [2y^7\cdot y\cdot 2y+(y^2)^2]dy$$

$$=5\int_0^1 y^4dy$$

$$=1.$$

（3）∵ $$I=\int_{OAB} 2xydx+x^2dy$$

$$=\int_{OA} 2xydx+x^2dy+\int_{AB} 2xydx+x^2dy.$$

又∵ 在线段OA上，有$x=x$，$y=0$，且$0\leqslant x\leqslant 1$，

在线段AB上，有$x=1$，$y=y$，且$0\leqslant y\leqslant 1$，

$$\therefore\quad I=\int_0^1(2x\cdot 0+x^2\cdot 0)dx+\int_0^1(2\cdot 1\cdot y\cdot 0+1^2)dy$$

$$=0+\int_0^1 dy$$

$$=1.$$

问：从上题的计算中可以得到什么结论？

答：从上面问题的计算中，可以看出，一般对坐标的曲线积分与积分路线和路线的起、终点有关，但有些对坐标的曲线积分仅与积分路线的起终点有关，而与积分路线无关。当积分路线的起、终点确定后，可以选择任意一条便于计算的路线来计算曲线积分。

所要解决的问题是，哪些对坐标的曲线积分与积分路线有关，哪些无关。

问：如何计算在空间曲线上对坐标的曲线积分？

答：我们把空间曲线上对坐标的曲线积分视为在平面曲线上对坐标的曲线积分的推广。

若空间曲线l的参数方程为：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$），则

$$\int_{(A)l}^{(B)} P(x,y,z)dx+(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt,$$

其中当t由α单调变到β时，对应的曲线由A变到B。

例如，求：$I=\int_l ydx+zdy+xdz$，其中l为圆柱螺旋线$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，由$t=0$到$t=2\pi$的一段（图4—16）。

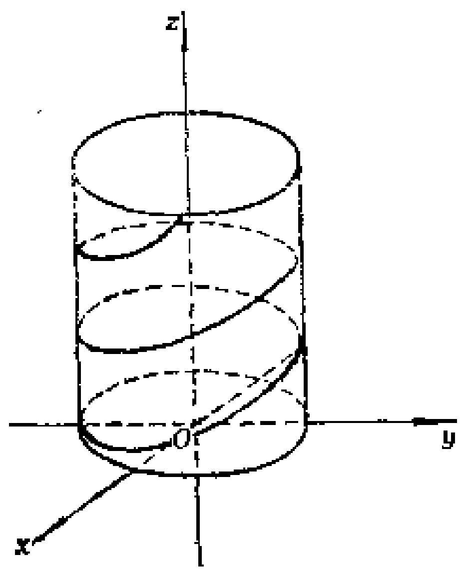


图 4—16

解：∵ $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$），

$$\therefore\quad I=\int_l ydx+zdy+xdz$$

$$=\int_0^{2\pi}[a\sin t(-a\sin t)+bt(a\cos t)+a\cos t\cdot b]dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}[b(t\cos t+\cos t)-a\sin^2 t]dt.$$

$$\because\quad \int t\cos tdt=t\sin t+\cos t,$$

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{4}(2t - \sin 2t),$$

$$\therefore \quad I = a\left[b(t\sin t + \cos t + \sin t) - \frac{a}{4}(2t - \sin 2t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\pi a^2.$$

三、对坐标的曲线积分与积分路线无关的条件

问：平面闭曲线的方向是如何规定的？

答： 在研究平面闭曲线及其方向时，应注意下面几点：

1．平面闭曲线上的任意一点都可以既看做是曲线的起点，又看做是曲线的终点．

2．平面闭曲线 l 的方向规定如下： 我们把逆时针方向称为闭曲线 l 的正向（图4—17），把顺时针方向称为闭曲线 l 的负向（图4—18）．

在一些比较复杂的问题中，平面闭曲线 l 的方向按下述方法规定：设由 l 所围成的平面区域D，如果想像一个人沿 l 走一圈时，若区域D总在他的左边，则称此人沿 l 的正方向走了一

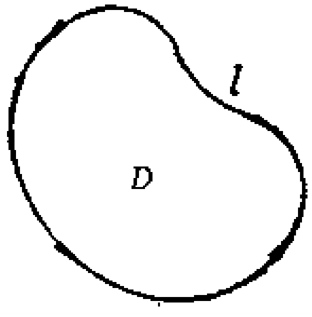


图 4—17

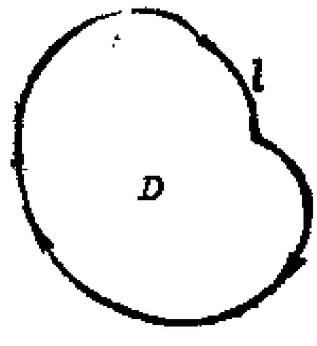


图 4—18

圈．否则他就沿l的负方向走了一圈．例如，曲线l为两个同心圆（图4—19），l所围成的区域是一个环形闭域D，则按上述规定可

知，外圆的逆时针方向为 l 的正方向，而里圆的顺时针方向为 l 的正方向。

以后我们用符号"$\oint_l$"表示沿闭曲线 l 正向的曲线积分。

3．设平面区域 D 由平面闭曲线 l 围成，如果 D 内的任一条封闭曲线总可以不经过区域 D 的边界 l 而连续地收缩为一点时，则称区域 D 为单连通区域，否则称为多连通区域．很显然，图4—17、4—18表示的是单连通区域，图4—19表示的是多连通区域．

问：如何求积分 $I=\oint_D y^2dx-x^2dy$？其中，l 是半径为1，中心在点（1，1）的圆周（图4—20）．

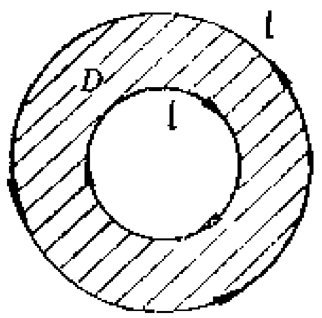


图 4—19

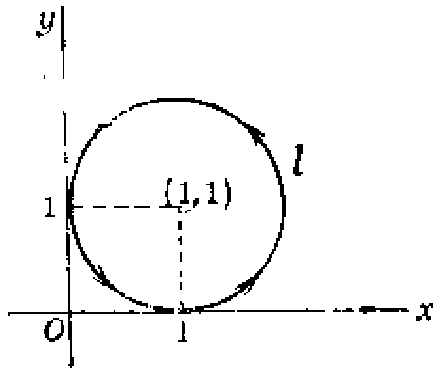


图 4—20

答： 我们规定逆时针方向为 l 的正方向，且 l 的参数方程为

$$x-1=\cos t,\quad y-1=\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

$\because$ $y^2dx=(1+\sin t)^2(-\sin t)dt$,

$x^2dy=(1+\cos t)^2\cos t\,dt$,

$$\therefore\quad I=\oint_l y^2dx-x^2dy$$

$$=\int_0^{2\pi}[(1+\sin t)^2(-\sin t)-(1+\cos t)^2\cos t]dt$$

$$=-\int_0^{2\pi}(2+\sin t+\cos t+\sin^3 t+\cos^3 t)dt$$

$$=-4\pi.$$

问：在什么条件下，曲线积分 $\int_l P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ 的值与积分路径 l 无关，而仅与路径 l 的起终点有关？

答：根据定理可知：

1．在 l 围成的区域 D 内的任意封闭曲线上的曲线积分恒为零时，积分 $\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 与路径 l 无关，而仅与 l 的起、终点有关。

2．在由 l 围成的单连通域 D 内 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 有连续偏导数，且恒有：$\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ 成立，则积分 $\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 与路径无关，而仅与 l 的起、终点有关。

在实际计算中，经常用到的是条件 2，在应用条件 2 时，应注意下面三点：

（i）判断由 l 围成的区域 D 为单连通域。

（ii）将积分整理为标准形式：$\int_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy$，且 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在 D 内有连续偏导数。

（iii）在 D 内任意一点 (x, y)，恒有 $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$。

例如，判断积分 $\int_l (xe^y - 2y)dy + (e^y + x)dx$ 是否与路径有关？其中 l 为圆 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$。

解：$\because$ l 围成的区域为单连通域，且

$$\int_l (xe^y - 2y)dy + (e^y + x)dx = \int_l (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy,$$

$$\because \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (e^y + x)}{\partial y} = e^y,$$

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (xe^y - 2y)}{\partial x} = e^y,$$

∴ $P(x, y)$，$Q(x, y)$在由 l 围成的区域内有连续偏导数，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

∴ 原积分与积分路径无关。

问：下面的判断对吗？为什么？

∵ **在积分$\int_l xdy-ydx$中，有 $P(x, y)=x$，$Q(x, y)=-y$，且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，**

∴ **原积分与积分路径无关。**

答： 不对。积分 $\int_l xdy-ydx$ 并不是标准形式，应在判断之前先将积分整理为标准形式，即

∵ $\int_l xdy-ydx=\int_l -ydx+xdy$.

∴ $P(x, y)=-y$，$Q(x, y)=x$.

∵ $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，

∴ $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$，则原积分与积分路径有关。

问：如何计算积分：$I=\int_{l\,(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$？其中，$l$为连接$O(0,0)$，$A(0,1)$，$B(1,2)$三点的圆周（图4—21）。

答： 我们可以先判断积分I 是否与路径有关，若无关则可以选择比较简单的、易于计算的积分路径去计算 I 。

∵ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y$，且全平面为单连通区域，所以，积分 I 与路径无关，为了简化计算，可选取积分路径为l_1+l_2（图4—21），即

$$I=\int_{l\,(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$$

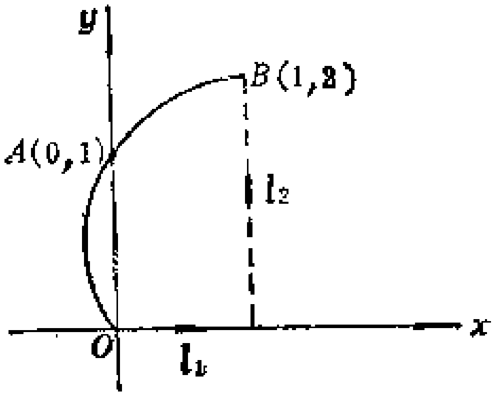


图 4—21

$$=\int_{(0,0)\ l_1+l_2}^{(1,2)} (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$$

∵ 在l_1上有：$y=0$，$dy=0$，$x=x$且$0\leqslant x\leqslant 1$；

在l_2上有：$x=1$，$dx=0$，$y=y$且$0\leqslant y\leqslant 2$.

$$\therefore\quad I=\int_{(0,0)\ l_1+l_2}^{(1,2)} (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$$

$$=\int_{(0,0)\ l_1}^{(1,0)} (e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy+\int_{(1,0)\ l_2}^{(1,2)} (e^y+x)dx$$

$$+(xe^y-2y)dy$$

$$=\int_0^1 (e^0+x)dx+0+0+\int_0^2 (1\cdot e^y-2y)dy$$

$$=\int_0^1 (1+x)dx+\int_0^2 (e^y-2y)dy$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+[e^y-y^2]_0^2$$

$$=e^2-\frac{7}{2}.$$

问：当曲线积分 $I=\int_{A(x_0,\ y_0)l}^{B(x,\ y)} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy$ 与路径无关时，曲线积分与起点 $A(x_0,\ y_0)$ 和终点 $B(x,\ y)$ 有什么关系？

答：在单连通域 D 中，如果曲线积分与路径无关，则我们可以类似定积分写法将 I 表示为：

$$I=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x,\ y)} P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

当把起点 $A(x_0,\ y_0)$ 固定，而终点 $B(x,\ y)$ 在区域 D 中变动，此时就类似定积分中的变上限积分出现一个以终点 $B(x,\ y)$ 为自变量的新的函数

$$u(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} Pdx+Qdy,$$

这个函数与 $P(x,\ y)$ 和 $Q(x,\ y)$ 有如下关系：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y),$$

即当曲线积分 I 与路径无关时，二元函数

$$u(x,\ y)=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} Pdx+Qdy$$

的全微分

$$du=d\left[\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} Pdx+Qdy\right]$$
$$=P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

这样，函数 $u(x,\ y)$ 就被称为函数组 $P(x,\ y)$ 与 $Q(x,\ y)$ 的原函数。应该注意的是，这只有在积分与路径无关时才有所谓原函数的说法。

问：当曲线积分 $I=\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} Pdx+Qdy$ 与路径无关时，如

何应用简便方法计算曲线积分?

答：当$P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$在单连通域D内具有一阶连续偏导数时，表达式$P(x, y)dx+Q(x, y)dy$为函数$u(x, y)$全微分的充要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

即 $$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy.$$

由于曲线积分I与路径无关，所以，我们可以选择便于积分的简单路径，使积分方便地求出，这时，函数$u(x,y)$便可找到了；反之，求出$u(x, y)$，则曲线积分也就解决了。一般来说，最简单的积分路径为平行于坐标轴的折线（图4—22）。

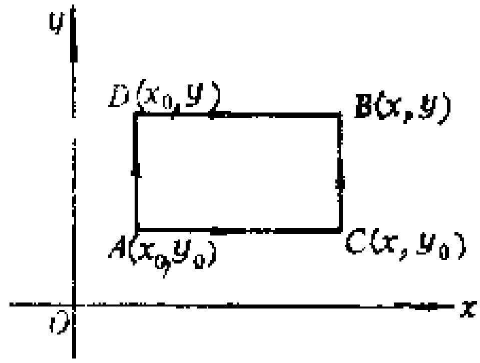


图 4—22

若积分路径是ACB，则在AC上有$dy=0$，在CB上有$dx=0$，

$$\therefore\quad u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} Pdx+Qdy+\int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy.$$

若积分路径为ADB，则类似可以推得

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy.$$

综上所述，我们得到了计算曲线积分的简便公式：

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

或 $$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy.$$

这两个公式告诉我们，当曲线积分与积分路径无关时，可利用公式直接用定积分计算。

问：如何应用定积分计算曲线积分

$$\boldsymbol{I=\int_{(0,0)}^{(x, y)} (2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy?}$$

答：显然，积分 I 符合所要求的条件。因此，可用前面推导的公式计算 I。

取 $x_0=0$，$y_0=0$，则有

$$u(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

$$=\int_{0}^{x} 2xdx+\int_{0}^{y}(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$

$$=x^2+y^2\cos x+x^2\cos y-x^2+C$$

$$=x^2\cos y+y^2\cos x+C \text{（}C\text{为任意常数），}$$

即 $$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$$

$$=x^2\cos y+y^2\cos x+C.$$

问：如果函数组$P(x, y)$与$Q(x, y)$在平面单连通闭域D上有原函数$u(x, y)$，则它有多少原函数？各原函数之间有什么关系？

答：函数组$P(x, y)$与$Q(x, y)$若在D上有原函数，则它必有无穷多个原函数，且各原函数之间仅差一个常数。即如果$u(x, y)$与$V(x, y)$都是$P(x, y)$与$Q(x, y)$的原函数，则

$$u(x, y)=v(x, y)+C \text{（}C\text{为任意常数）}.$$

当　$u(x_0, y_0)=0$，

则　$C=-v(x_0, y_0)$.

于是有

$$u(x, y)=v(x, y)-v(x_0, y_0)$$

即 $$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx+Q(x, y)dy=v(x, y)-v(x_0, y_0).$$

这就告诉我们，对于与积分路线无关的曲线积分I，只要知道路径的起、终点，便可类似定积分中的“牛顿—莱不尼兹”公式，由原函数的起、终点值去计算。因此，这个公式在一定意义上亦可看成是定积分“牛顿—莱不尼兹”公式的推广。

四、格林公式

问：积分$\oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy$与二重积分有什么关系？

答：我们知道，在定积分中，“牛顿—莱不尼兹”公式建立了定积分与不定积分的联系，即把函数在闭区间上的积分与它的原函数在区间端点的函数值建立了联系，使得可以利用不定积分去计算定积分。

现在的问题是，能否建立二重积分与沿封闭曲线l上的曲线积分之间的联系？我们可以把积分：$\oint_l P(x, y)dx+Q(x, y)dy$看成是函数$P(x, y)$，$Q(x, y)$，在由封闭曲线$l$围成的平面

闭域D的边界曲线的积分，这时，这个曲线积分可以表示成D上的二重积分，即

定理（格林公式）：设D是以分段光滑的封闭曲线l为边界的平面单连通区域，$P(x, y)$与$Q(x, y)$在D上及l上连续，并且分别对x与y有连续偏导数，则有

$$\oint_l P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

分析：我们分下面两种情况证明这个定理。

第一种情况（如图4—23），这时，区域D的边界曲线l与垂直于坐标轴的直线最多只有两个交点；第二种情况（如图4—24），这时区域D的边界曲线l与垂直于坐标轴的直线有两个以上的交点，我们通过计算区域D上的二重积分：$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$ 和 $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$，推出格林公式。

证明：（1）设区域D的边界曲线l由曲线

$y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$（图4—23(a)）；

或　$x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$（图4—23(b)）围成。

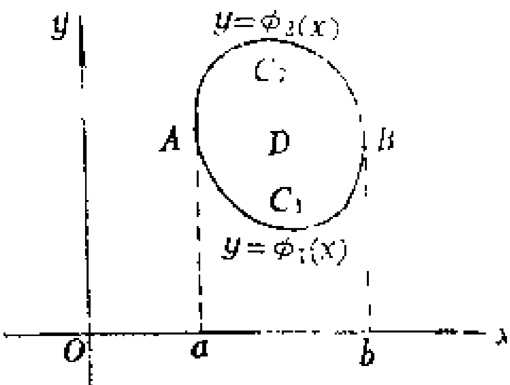


图 4—23(a)

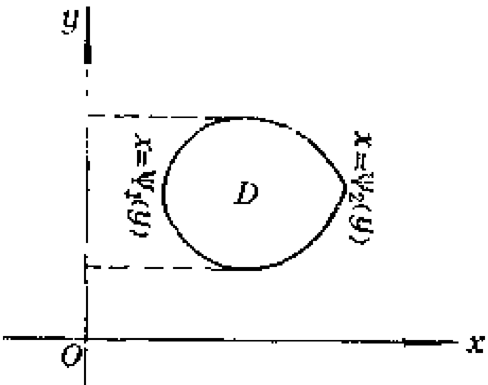


图 4—23(b)

$\because$ $\frac{\partial P}{\partial y}$在$D$上连续，

$\therefore$ $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$

$$=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$=\int_a^b [P(x,\ y)]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ \varphi_2(x)]-P[x,\ \varphi_1(x)]\}dx$$

$$=\int_a^b P[x,\ \varphi_2(x)]dx-\int_a^b P[x,\ \varphi_1(x)]dx$$

$$=\int_{\overset{\frown}{AC_2B}} P(x,\ y)dx-\int_{\overset{\frown}{AC_1B}} P(x,\ y)dx$$

$$=-\int_{\overset{\frown}{BC_2A}} P(x,\ y)dx-\int_{\overset{\frown}{AC_1B}} P(x,\ y)dx$$

$$=-\oint_l P(x,\ y)dx.$$

同理可证， $\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_a^b dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx$

$$=\oint_l Q(x,\ y)dy.$$

$$\therefore\quad \iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

$$=\oint_l Q(x,\ y)dy+\oint_l P(x,\ y)dx$$

$$=\oint_l P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy.$$

（2）如果区域D的边界曲线与垂直于坐标轴的直线有两个以上的交点时（图4—24），可以引进几条辅助直线，通过辅助直

线将区域D分成有限个具有（1）特点的小区域。这样，格林公式在上述有限个小区域上成立，而整个区域D上的二重积分就是各小区域上二重积分的和。这时，沿这些小区域各边界曲线上的曲线积分之和，就是沿区域D的边界曲线l上的曲线积分。这是因为，在各辅助直线上的曲线积分总是具有相反方向的二次积分，此时积分绝对值相同而符号相反，则相互抵消了。因此，在整个区域D上格林公式依然成立。

问：格林公式有什么重要意义？应用格林公式应注意什么问题？

答：格林公式沟通了区域D上的二重积分与该区域边界曲线l的曲线积分之间的关系。使我们可以根据问题的实际情况选择应用二重积分计算曲线积分或应用曲线积分计算二重积分。因此，格林公式在概念和计算上都具有非常重要的意义。人们常把格林公式与牛顿—莱不尼兹公式相比，并将格林公式视为牛顿—莱不尼兹公式在某种意义上的推广。

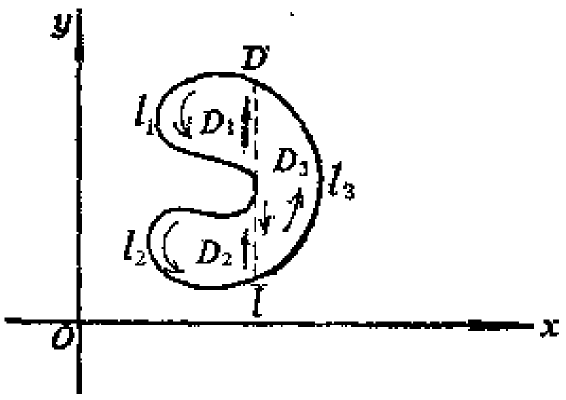


图 4—24

应用格林公式时一般要注意下面三个问题：

（1）注意区域D是由封闭曲线l围成的单连通域。

（2）函数$P(x, y)$与$Q(x, y)$在D上及l上连续，且有一阶连续偏导数。

（3）牢记公式的顺序为：

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_l P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

问：如何应用格林公式计算曲线积分：$\oint\limits_l xdy$？其中l为由坐标轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$围成的三角形迴路（图4—25）.

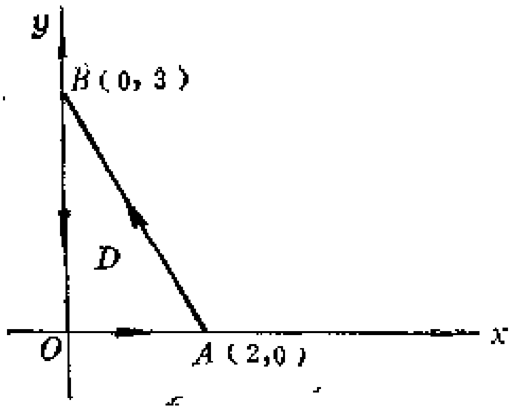


图 4—25

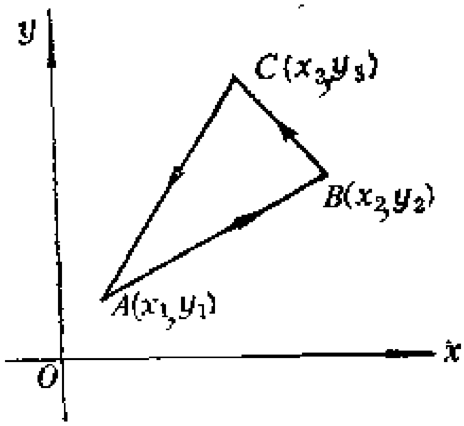


图 4—26

答：显然，区域D为单连通域，且在积分$\oint_l xdy$中，有$P(x, y)=0$，$Q(x, y)=x$，在区域D上连续，且有一阶连续偏导数。

$$\therefore \oint_l xdy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$
$$=\iint_D dxdy$$
$$=D$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3$$
$$=3.$$

问：如何应用格林公式计算二重积分：$\iint_D x^2dxdy$？其中D是以$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$为顶点的三角形闭域（图4—26）。

答：如果直接将上述二重积分化为累次积分去计算可以，但有些麻烦.下面应用格林公式来计算.可以看出，积分符合格林公式的条件，且$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2$，

于是可令　$P(x, y)=0$，$Q(x, y)=\frac{1}{3}x^3$。

$$\because \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint\limits_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

则 $$\iint\limits_D x^2dxdy=\oint\limits_l \frac{x^3}{3}dy$$

$$=\int\limits_{AB}\frac{x^3}{3}dy+\int\limits_{BC}\frac{x^3}{3}dy+\int\limits_{CA}\frac{x^3}{3}dy.$$

又 $$\frac{dy}{dx}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

则 $$dy=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx.$$

$$\therefore \int\limits_{AB}\frac{x^3}{3}dy=\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^3}{3}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}dx$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^3}{3}dx$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left.\frac{x^4}{12}\right|_{x_1}^{x_2}$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_2^4-x_1^4}{12}$$

$$=\frac{(y_2-y_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)}{12}.$$

同理，有

$$\int\limits_{BC}\frac{x^3}{3}dy=\int_{x_2}^{x_3}\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{x^3}{3}dx$$

$$=\frac{(y_3-y_2)(x_3+x_2)(x_3^2+x_2^2)}{12}.$$

$$\int_{CA} \frac{x^3}{3} dy = \int_{x_3}^{x_1} \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \frac{(y_1 - y_3)(x_1 + x_3)(x_1^2 + x_3^2)}{12}.$$

$$\therefore \iint_D x^2 dx dy = \frac{1}{12}[(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2)$$

$$+ (y_3 - y_2)(x_3 + x_2)(x_3^2 + x_2^2)$$

$$+ (y_1 - y_3)(x_1 + x_3)(x_1^2 + x_3^2)].$$

问：下面的计算对吗？若不对，如何改正？

计算： $I = \oint_l \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$，**其中$l$为圆$x^2 + y^2 = a^2$。**

解： $\because \quad P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$\therefore$ 依格林公式有

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = 0.$$

答：不对。因为函数$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$，$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$在原点不连续，所以，积分不满足格林公式的条件，不能直接应用格林公式。

可令 $x = a\cos t$，$y = a\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，

则

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{[(-a\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(a\cos t)]}{a^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi.$$

问：下面的计算对吗？为什么？

计算：$I=\oint_l xy^2dy-x^2ydx$，其中l为圆周$x^2+y^2=a^2$，方向依逆时针方向（图4—27）。

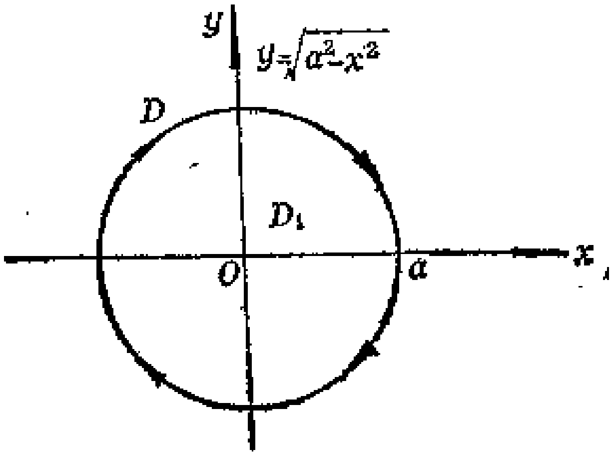


图 4—27

解：$P(x,\ y)=xy^2$，$Q(x,\ y)=-x^2y$，

依格林公式有

$$
\begin{aligned}
\oint_l xy^2dy-x^2ydx &=\iint_D \left[\frac{\partial(-x^2y)}{\partial x}-\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right]dxdy \\
&=-\iint_D 4xydxdy \\
&=-16\iint_{D_1} xydxdy \\
&=-16\int_0^a xdx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy \\
&=-16\int_0^a x\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&=-16\int_0^a \frac{1}{2}x(a^2-x^2)dx \\
&=-8\left[\int_0^a a^2xdx-\int_0^a x^3dx\right]
\end{aligned}
$$

$$= -8\left[\frac{1}{2}a^2x^2\Big|_0^a - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^a\right]$$

$$= -2a^4.$$

答：不对。错在将 $P(x,y)$ 与 $Q(x, y)$ 选错了。正确的解法为：

$$\because \quad I = \oint_l xy^2dy - x^2ydx = \oint_l -x^2ydx + xy^2dy.$$

$$\therefore \quad P(x, y) = -x^2y, \ Q(x, y) = xy^2,$$

$$\because \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2,$$

$$\therefore \quad I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$$

$$= 4\iint_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy.$$

为了计算方便可选择极坐标，即令

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \ 且 \quad 0 \leqslant \rho \leqslant a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

则

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}a^4.$$

问：如何证明沿分段光滑的任意曲线l积分，总有

$$\oint_l f(x, y)(ydx + xdy) = 0?$$

其中$f(x, y)$是关于中间变量$u = xy$具有一阶连续导数的函数.

答：我们可以用格林公式证明。

$$\because \oint_l f(x,y)(ydx+xdy)$$
$$=\oint_l f(x,y)ydx+f(x,y)xdy,$$

且为x、y的复合函数。

设 $P(x,y)=f(x,y)y$，$Q(x,y)=f(x,y)x$，

则根据复合函数求导法则，有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f'_u(u)\cdot u'_y\cdot y+f(u)\cdot y'_y$$
$$=f'_u(u)xy+f(u),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=f'_u(u)\cdot u'_x\cdot x+f(u)\cdot x'_x$$
$$=f'_u(u)xy+f(u),$$

$$\because \oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$
$$\therefore \oint_l f(xy)(ydx+xdy)=0.$$

问：如何应用曲线积分计算平面闭域的面积？

答：在格林公式

$$\oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

中，令$P(x,y)=-y$，$Q(x,y)=x$，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]dxdy$$
$$=2\iint_D dxdy$$

$$=2S,$$

其中S为区域D的面积。

$$\because \quad \oint_l (-y)dx+xdy=2S$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\oint_l (-y)dx+xdy.$$

这就是应用曲线积分求平面闭域D的面积S的公式，有时用

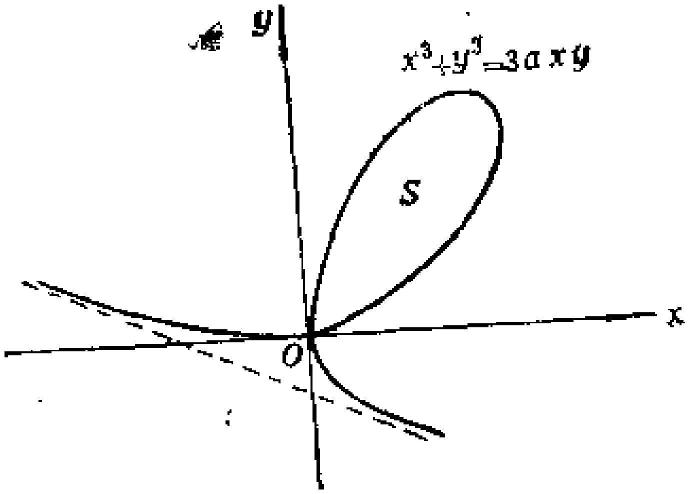


图 4—28

这个公式求平面图形的面积比较简单。

问：如何求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ 一圈所围成平面图形的面积（图4—28）？

答： 为了便于计算，可通过设$y=tx$将方程变为参数方程，即

$$\because \quad y=tx,\ x=\frac{y}{t},$$

$$\therefore \quad x^3+(tx)^3=3ax(tx)$$

$$\Rightarrow \quad x^3(1+t^3)=3atx^2$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{3at}{1+t^3},$$

且知 $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

$$\because \quad t=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\theta,$$

$\therefore$ 当θ由0变到$\frac{\pi}{2}$时，t 由 0 变到$+\infty$。

$\because$ $y=tx$,

$\therefore$ $dy=xdt+tdx$,

则 $$-ydx+xdy=-txdx+x(xdt+tdx)$$
$$=-txdx+x^2dt+txdx$$
$$=x^2dt,$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}\oint_l -ydx+xdy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)^2 dt$$
$$=\frac{9a^2}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$
$$=\frac{9a^2}{6}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]_0^b$$
$$=\frac{3}{2}a^2.$$

五、曲线积分知识之间的联系

问：如何归纳对坐标的曲线积分中各部分知识的内在联系？

答：对坐标的曲线积分主要包括下面四部分内容：

（1）对坐标的曲线积分的定义及曲线积分与路径的关系；

（2）在封闭曲线上的曲线积分；

（3）格林公式——在封闭曲线上曲线积分与二重积分的联系；

（4）原函数的计算。

我们可以用下面的箭头图表示这四部分知识之间的关系：

$$\int_l Pdx+Qdy \xleftarrow{\quad l\text{为封闭曲线}\quad}\!\!\xrightarrow{} \oint_l Pdx+Qdy=0$$

$\updownarrow$ 在单连通域上，函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 有一阶连续的偏导数 $\updownarrow$

存在 $u(x, y)$ 使 $du=Pdx+Qdy \xleftarrow{}\!\!\xrightarrow[\text{路径起点固定}]{} \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

问：对弧长的曲线积分与对坐标的曲线积分有什么关系？

答： 对弧长的曲线积分与对坐标的曲线积分从定义上是两个不同的概念，然而两者都是沿曲线 l 上的积分，所以它们之间必然存在一定的内在联系。我们可以把对弧长的曲线积分通过计算转化为对坐标的曲线积分，反之也一样。如图4—29所示，$\overrightarrow{ds}$为曲线 l 上点M处的方向矢量，$\vec{i}$与$\vec{j}$分别为 x 轴、y轴的单位向量，且 $\alpha=(\overrightarrow{ds}, \vec{i})$，$\beta=(\overrightarrow{ds}, \vec{j})$。

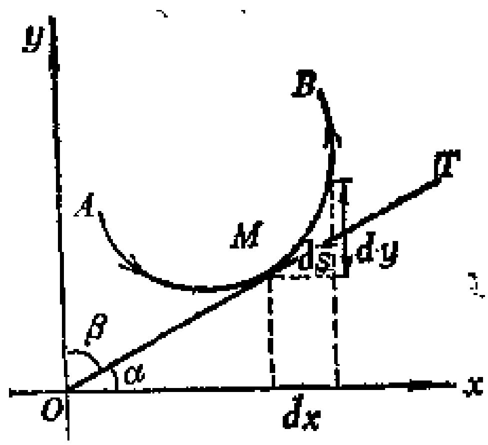


图 4—29

$$\because \quad \cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},$$

$$\therefore \quad dx=\cos\alpha ds, \ dy=\cos\beta ds.$$

$$\therefore \quad \int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

$$=\int_{\widehat{AB}} [P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\cos\beta]ds.$$

通过这个公式就揭示了两个曲线积分之间的关系。

问：对坐标的曲线积分是有方向性的，当积分路径$\widehat{AB}$变为$\widehat{BA}$

时，积分值要改变符号，而对弧长的曲线积分则无方向性．将对坐标的曲线积分表示为对弧长的曲线积分时，对坐标的曲线积分的方向性如何体现呢？

答：我们知道，当曲线改变方向时，曲线各点的方向矢量也随着改变方向，因而方向余弦$\cos\alpha$与$\cos\beta$也随着相差一个负号，这时，有

$$-\int_{\widehat{BA}} P(x, y)dx+Q(x, y)dy$$

$$=-\int_{\widehat{BA}} [P(x, y)\cos\alpha+Q(x, y)\cos\beta]ds,$$

等式依然成立。

综上所述可以看出，如果仅把 $P(x, y)$ 与$Q(x, y)$ 看成被积函数，则积分为对坐标的曲线积分；如果把 $P(x, y)\cos\alpha$与$Q(x, y)\cos\beta$看成被积函数，则积分为对弧长的曲线积分。从这个意义上讲，所谓对坐标的曲线积分与对弧长的曲线积分，是针对不同的被积函数而言的。

六、对面积的曲面积分

问：曲面积分的积分区域有什么特点？

答：曲面积分的积分区域是空间曲面．做为曲面积分积分区域的曲面应是分段光滑的，也就是说，在各块曲面上的各点处应有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动。

例如，球面、柱面是光滑的，长方体的表面则是分段光滑的。

如果空间曲面Σ是分片光滑的，而且有 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\cdots+\Sigma_n$，则函数 $f(x, y, z)$ 在Σ上的曲面积分等于函数在各光滑曲面上曲面积分之和，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)ds=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)ds+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)ds$$

$$+\iint_{\Sigma_3} f(x, y, z)ds.$$

问：对面积的曲面积分是如何定义的？

答：与上述各数学概念一样，对面积的曲面积分也是从实际问题中抽象出来的。其定义方法仍然是"分割、求和、取极限"。

1．求展布在曲面上的质量。

设曲面Σ为一物质曲面（图 4—30），其质量分布的密度函数为$\rho(x, y, z)$，为了求出这块曲面的质量，首先以任意分法将曲面Σ分割成n个小曲面块Δq_1，Δq_2，…，Δq_n，其中$\Delta q_i (i=1,2,\cdots,n)$既代表小曲面块的名称，又代表小曲面块的面积。

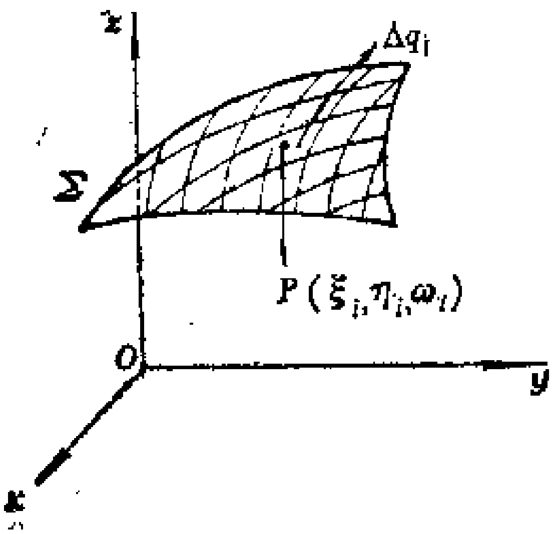


图 4—30

在$\Delta q_i (i=1,2,\cdots,n)$上任取一点$(\xi_i, \eta_i, \omega_i)$，则$\Delta q_i$的质量$\Delta M_i$可近似表示为：

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \omega_i)\Delta q_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

整个曲面Σ的质量M近似表示为：

$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \omega_i)\Delta q_i.$$

当$\Delta q_i (i=1,2,\cdots,n)$的最大直径$\max\{d_i\}$趋于零时，上面和式的极限如果存在，则这个极限值就是曲面Σ的质量，即

$$M=\lim_{\max\{d_i\}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \omega_i)\Delta q_i.$$

2．抽去曲面Σ质量的物理意义，就得到对面积的曲面积分

的数学定义：

设函数 $f(x, y, z)$ 在分片光滑的曲面Σ上连续，将Σ任意分割成n个小曲面积块：Δq_1, Δq_2, …, Δq_n, 在Δq_i上($i=1,2,\cdots,n$)任取一点 $(\xi_i, \eta_i, \omega_i)$，当分法无限细密时（或 $\max\{di\}\to 0$），极限

$$\lim_{\max\{di\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \omega_i)\Delta q_i$$

存在，则定义其极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面Σ上对面积的曲面积分，记为：

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dq.$$

其中，函数 $f(x, y, z)$ 称为被积函数，曲面Σ称为积分曲面，dq称为曲面的面积元素。

3．从上述定义看出：

（1）在研究对面积的曲面积分时，只涉及曲面的面积，而不考虑曲面的方向。

（2）面积元素$dq>0$。

（3）当曲面Σ由Σ_1, Σ_2, …, Σ_n组成时，有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dq=\iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dq+\iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dq +\cdots, +\iint_{\Sigma_n} f(x, y, z)dq.$$

（4）当曲面Σ为封闭曲面时，在Σ上对面积的曲面积分表示为：

$$\oiint_{\Sigma} f(x, y, z)dq.$$

问：如何计算对面积的曲面积分？

答：如果下面三个条件同时具备，即

1．曲面Σ可用单值函数$z=z(x, y)$表示，且$z=z(x, y)$有连

续偏导数；

2．被积函数$f(x, y, z)$在曲面Σ上连续；

3．D_{xy}为Σ在 xoy 坐标面上的投影区域（图 4—31），则在Σ 上对面积的曲面积分可转化为二重积分：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dq$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy,$$

其中，面积元素$dq=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$。

综上所述，可归纳出对面积的曲面积分的计算步骤为：

（1）将单值函数 $z=z(x, y)$ 代到被积函数$f(x, y, z)$中，

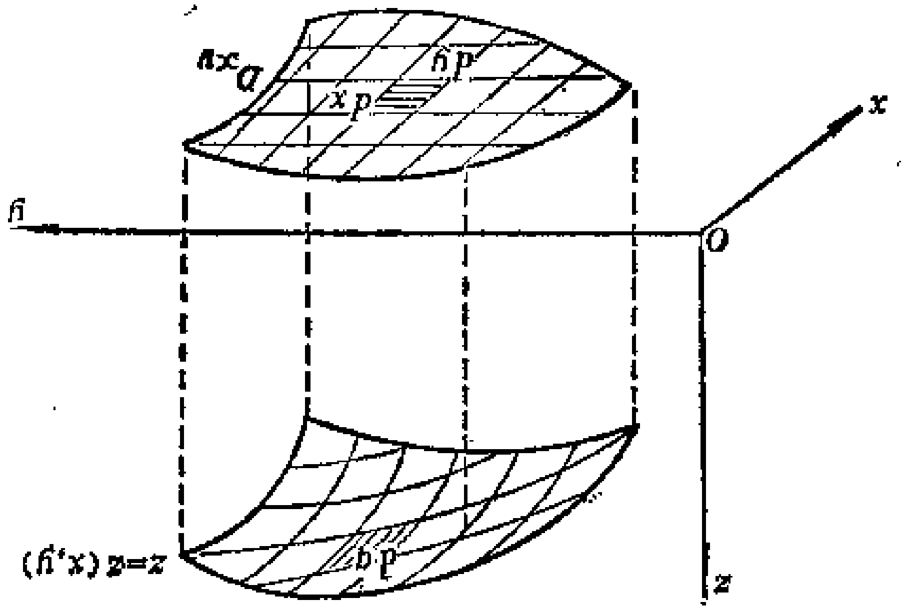


图 4—31

得到$f[x, y, z(x, y)]$；

（2）求出函数 $z=z(x, y)$ 的两个连续偏导数z_x', z_y', 并计算面积元素：$dq=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$；

（3）确定曲面Σ在 xoy坐标面上的投影区域D_{xy}，定出x, y的变化范围；

（4）计算二重积分：

$$\iint\limits_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\, dxdy$$

或 $$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dq$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\, dxdy.$$

应该注意的是，曲面Σ如果可表示为$x=x(y, z)$或$y=y(x, z)$时，则同样有公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dq$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z] \sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\, dydz,$$

或 $$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dq$$

$$=\iint\limits_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z] \sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}\, dxdz.$$

其中，D_{yz}为曲面Σ在yoz坐标面上的投影域，D_{xz}为Σ在xoz坐标面上的投影域。

问：如何计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dq$？其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$（图4—32）。

答：根据被积函数与曲面的对称性，可将在球面Σ上的积分转化为在xoy坐标面上方半球面Σ_1的积分，即

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dq=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)dq.$$

$\because\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$

$$\therefore\quad I=2\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2+z^2)dq=2\iint\limits_{\Sigma_1}a^2dq$$

$$=2a^2\iint\limits_{\Sigma_1}dq.$$

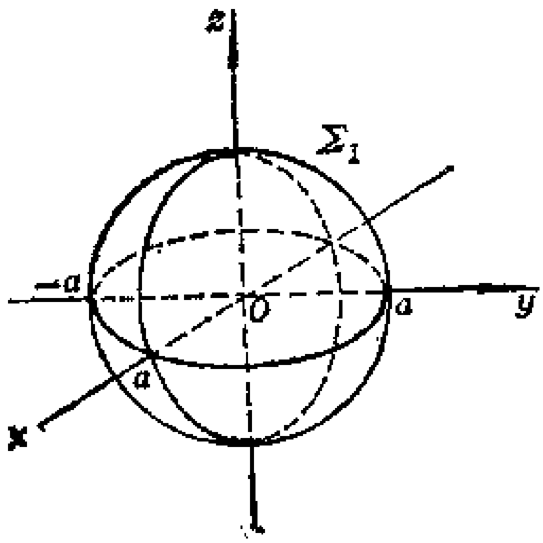


图 4—32

$\because$ 上半球面Σ_1的方程为：

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

又$\because$ $$z_x'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$z_y'=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

则 $dq=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$\therefore\quad I=2a^2\iint\limits_{\Sigma_1}dq=2a^3\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

其中，D_{xy}为球面Σ_1在 xoy 坐标面上的投影区域，区域的边界曲线为圆$x^2+y^2=a^2$，为了计算方便我们应用极坐标，有

$$I=2a^3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$=-2\pi a^3\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}d(a^2-r^2)$$

$$=-2\pi a^3\left[2\sqrt{a^2-x^2}\right]_0^a$$

$$=4\pi a^4.$$

$$\therefore\quad I=\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dq=4\pi a^4.$$

问：如何计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dq$？其中$\Sigma$为锥面 $z=$

$\sqrt{x^2+y^2}$被曲面$x^2+y^2=2ax$所截得的部分（图4—33）.

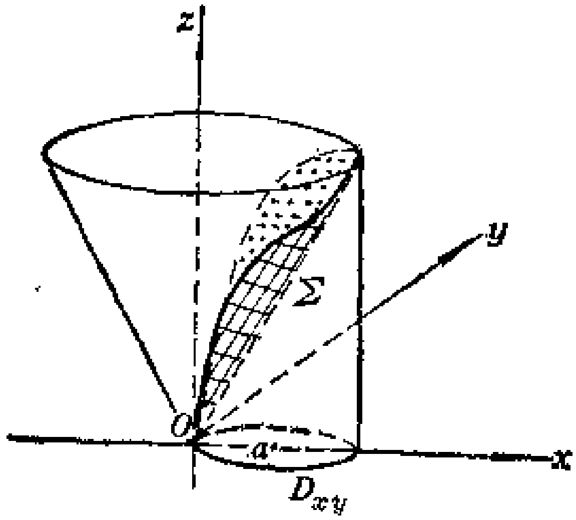


图 4—33

答：∵ $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

又∵ $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

则 $dq=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy.$$

∵ 曲面Σ在xoy坐标面的投影域为圆域：

$(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$，可转化为极坐标形式：

$$r=2a\cos\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore\ \iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)\,dq=\iint_{D_{xy}}(xy+yz+zx)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy+(y+x)z]\,dxdy.$$

而 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\therefore\quad \iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dq=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy+(y+x)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy,$$

又 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$

$$\therefore\quad \iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dq$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\sin\theta+\cos\theta)]r\cdot dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)d\theta\int_{0}^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)d\theta\quad r^4\Big|_{0}^{2a\cos\theta}$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^4\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^5\theta)d\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^5\theta d\theta\right]$$

$$\because\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^5\theta d\theta=0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2d\sin\theta,$$

$$\therefore \iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dq=4\sqrt{2}\,a^4\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2 d\sin\theta$$

$$=4\sqrt{2}\,a^4\frac{16}{15}$$

$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4.$$

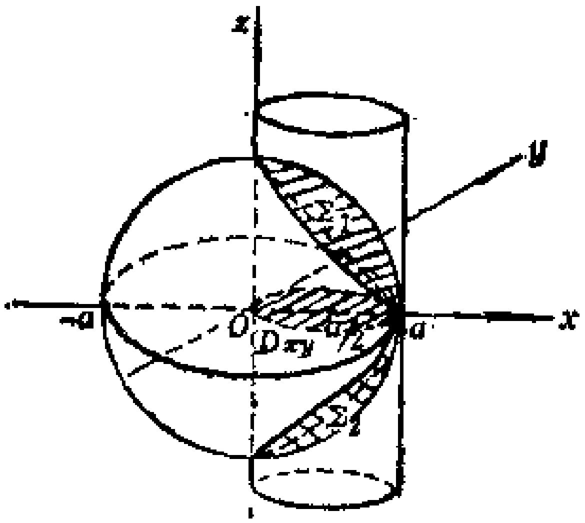


图 4—34

问：如何求球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在柱面$x^2+y^2-ax=0$内部曲面的表面积（图4—34）？

答：根据对面积曲面积分的定义可知，求曲面Σ表面积的公式为：

$$S=\iint\limits_{\Sigma}dq.$$

又 $\because\ \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2=2\Sigma_1,$

$$\therefore\ S=2\iint\limits_{\Sigma_1}dq.$$

又 $\because\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},$

且 $z'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\qquad z'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$

$$\therefore\ dq=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\ dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}dxdy$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$\therefore\ S=2\iint\limits_{\Sigma_1}dq=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

$\because$ D_{xy}为xoy坐标面上的圆域：$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$，转化为极坐标方程为：$r\leqslant a\cos\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$\therefore\quad S=2a\iint\limits_{D_{xy}}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}drd\theta$$

$$=2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}dr$$

$$=-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}d(a^2-r^2)$$

$$=-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-1)d\theta$$

$$=2a^2(\pi-2).$$

七、对坐标的曲面积分

问：什么是有向曲面？

答： 我们常见的曲面一般都有两侧（图4—35），如果用颜色涂这个曲面，可以在曲面的一侧涂一种颜色，另一侧涂另一种颜色，这时这两种颜色永远也不会交汇在一起。例如，球面就是一个封闭的双侧曲面，外球面为一侧，内球面为另一侧，今后我们将就这种具有两个侧面的双侧曲面进行讨论。



图 4—35

在一般情况下，我们可以根据具体问题规定双侧曲面中的一侧为正，另一侧为负，这样规定了方向的曲面称为有向曲面（图 4—35）.例如，可规定双侧球面的外球面为正，内球面为负。当曲面光滑时，曲面上的每点都有对应的法向量。此时，一般用法向量表示曲面的正、负方向。如果曲面由单值函数 $z=f(x, y)$ 所确定，则可以取它的法向量 $\vec{n}$ 的指向朝上的一侧为曲面正的一侧，另一侧为负的一侧；对于封闭的曲面，常取它的法向量 $\vec{n}$ 的指向朝外的一侧为曲面正的一侧（图4—36）。

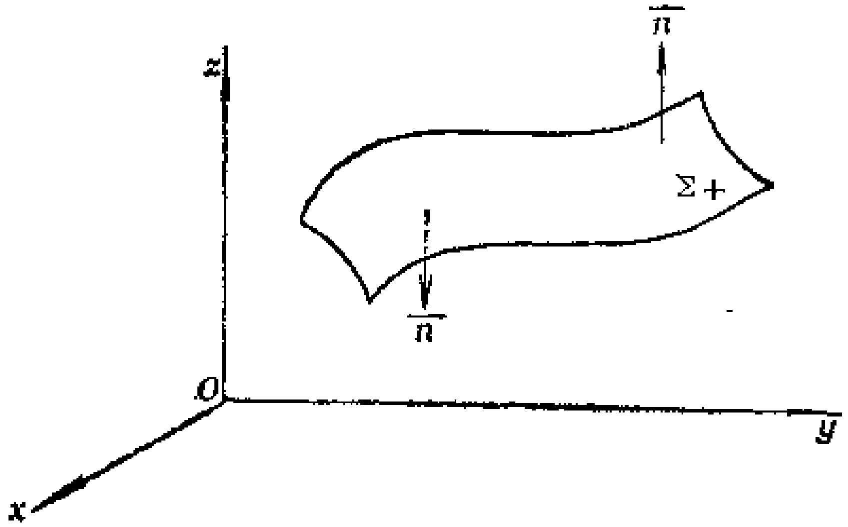


图 4—36

问：有没有不能分成两侧的曲面呢？

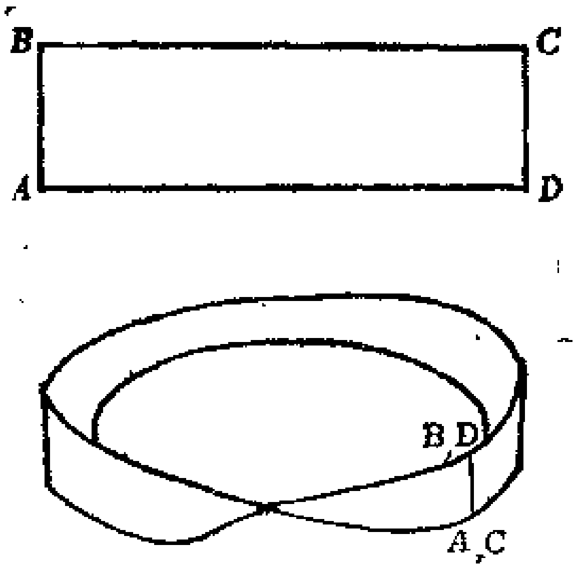


图 4—37

答：有。所谓莫彼乌斯曲面就是不能分为两侧的单侧曲面。这个曲面的构造如下：

将长方形纸带 $ABCD$ 先扭转一次，然后将 B 与 D、A 与 C 粘合起来（图4—37），这时就形成一个单侧曲面。若用颜色涂这个曲面，则可以不越过纸带的边缘涂遍纸带的全部，

此时就无法分出曲面的两个侧面。

问：如何理解有向曲面在坐标平面上的投影？

答： 我们分别在曲面 S 的正侧 S_+和负侧 S_-上任取一块同样大小的小曲面 dS_+和dS_-，显然，这两块小曲面的面积均为 dS，但方向相反（图4—38）。

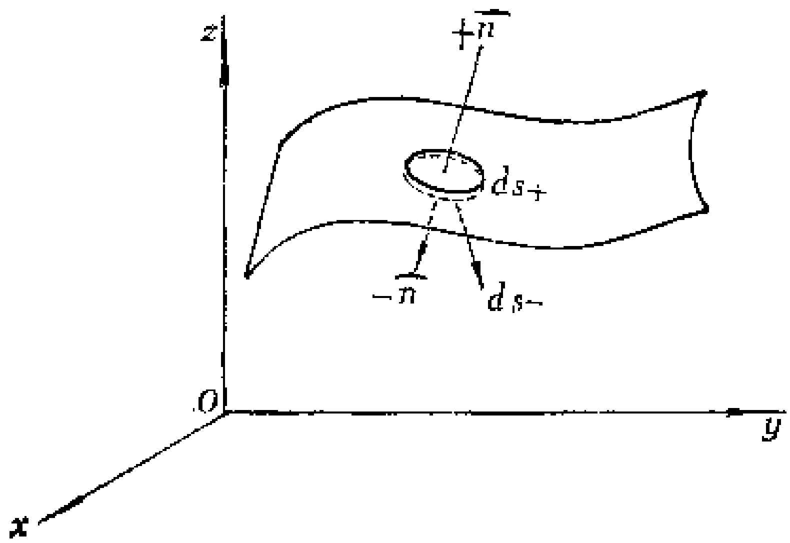


图 4—38

若在dS_+上任意取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，与该点对应的法向量的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$。与dS_+对应的dS_-上也有与$P_1(x_1, y_1, z_1)$对应的点$P_2(x_2, y_2, z_2)$，显然，P_2点法向量的方向余弦为$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta$, $\cos(\pi-\gamma)=-\cos\gamma$, 因此，$dS_+$在 xoy坐标面上的投影为：

$$d\sigma_{xy}=\cos\gamma dS,$$

而dS_-在 xoy坐标面上的投影为：

$$d\sigma_{xy}=-\cos\gamma dS.$$

当我们用 $dxdy$去表示dS 在 xoy 坐标面上的投影域 $d\sigma$ 时，$dxdy$是可正可负的。它的正负由方向余弦所决定。

应该注意的是，在二重积分中，$dxdy$ 表示面积元素，所以 $dxdy>0$，而这里则不然，$dxdy$ 表示小曲面dS在 xoy 坐标面上的投影，因此是可正可负的。

问：如何计算不可压缩液体在稳定流动*时通过曲面的流量？

答： 由于我们所研究的曲面是有向曲面，所以，液体通过曲面时与曲面的方向有密切的联系。

为了求出液体在单位时间内通过曲面S的流量，我们首先将曲面S以任意方法分割成n个小曲面：$\Delta q_i(i=1,2,\cdots,n)$；然后在$\Delta q_i(i=1,2,\cdots,n)$上任取一点$M_i(x_i, y_i, z_i)$，且设在该点上液体的流速为$\vec{v_i}$，这时在单位时间内经过$\Delta q_i$的流量$\Delta Q_i$可近似视为：以$\Delta q_i$为底，以$\vec{v_i}$在法向量$\vec{n_i}$上投影$v_n$为高的柱体体积（图4—39），即

$$\Delta Q_i \approx v_n \cdot \Delta q_i.$$

由于　$v_n = |\vec{v_i}|\cos\theta_i$,

所以，

$$\Delta Q_i \approx |\vec{v_i}|\cos\theta_i \cdot \Delta q_i.$$

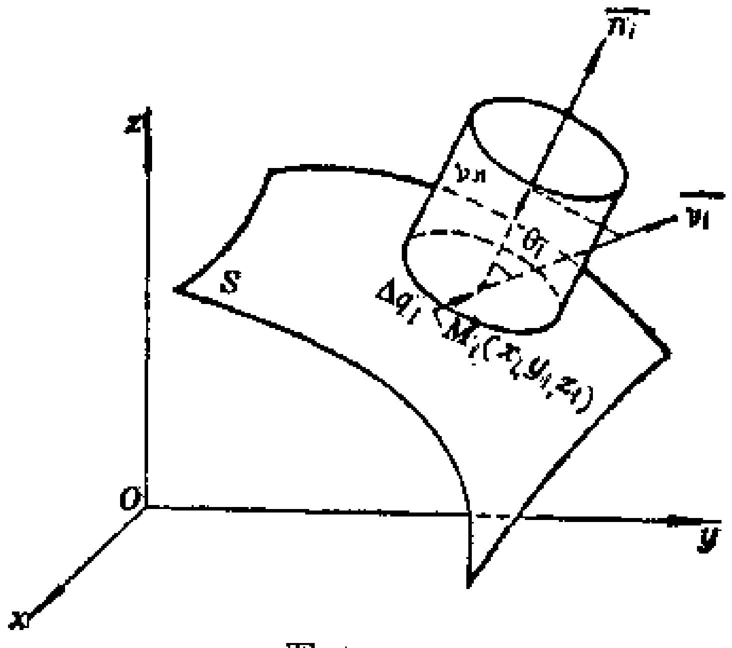


图 4—39

若$\vec{v_i}$在各坐标轴上的投影分别为：$P_i(x_i, y_i, z_i)$，$Q_i(x_i, y_i, z_i)$，$R_i(x_i, y_i, z_i)$，且法向量$\vec{n_i}$的方向余弦为：$\cos\alpha_i$，$\cos\beta_i$，$\cos\gamma_i$，则单位时间内通过Δq_i的流量ΔQ_i可近似表示为

---

* 不可压缩液体是指流体的密度不随时间而变化，一般可设密度$\rho=1$。稳定流动是指液体的流速不随时间而变化，而仅与曲面上点的位置有关。

$$\Delta Q_i \approx P_i \cos\alpha_i \cdot \Delta q_i + Q_i \cos\beta_i \cdot \Delta q_i + R_i \cdot \cos\gamma_i \Delta q_i$$
$$= P_i \Delta\sigma_{i_{yz}} + Q_i \Delta\sigma_{i_{xz}} + R_i \Delta\sigma_{i_{xy}},$$

其中，$\Delta\sigma_{i_{yz}}$为Δq_i在yoz坐标面上的投影，$\Delta\sigma_{i_{xz}}$为Δq_i在xoz坐标面上的投影，$\Delta\sigma_{i_{xy}}$表示Δq_i在xoy坐标面上的投影。显然，当Δq_i在曲面S的正侧时（此时，$0<\alpha_i<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta_i<\frac{\pi}{2}$，$0<\gamma_i<\frac{\pi}{2}$），各投影为正；若Δq_i在曲面S的负侧时（此时，$\frac{\pi}{2}<\alpha_i<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta_i<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\gamma_i<\pi$），各投影为负。我们称$\Delta q_i$在各坐标面的投影为有向投影。

当分法无限细密时，下述极限值就是液体在单位时间内通过曲面S的流量Q，即

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i$$

$$= \lim_{\lambda\to 0^*} \sum_{i=1}^{n} [\rho_i \Delta\sigma_{i_{yz}} + Q_i \Delta\sigma_{i_{xz}} + R_i \Delta\sigma_{i_{xy}}].$$

从上式可以看出，当Δq_i在S_+侧时，流量Q为正值；当Δq_i在S_-侧时，流量Q为负值。

根据极限法则，上式可写为：

$$Q = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P_i \Delta\sigma_{i_{yz}} + \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q_i \sigma_{i_{xz}} +$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} R_i \Delta\sigma_{i_{xy}}.$$

问：对坐标的曲面积分是如何定义的？

答：我们将不可压缩液体在稳定流动时通过曲面S的流量给予数学抽象，就得到对坐标的曲面积分的定义。

定义：设函数$P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$为定义在曲面S上的连续函数，选定曲面S的正侧，以任意分法将S分

成n个小曲面块：$\Delta q_i(i=1,2,\cdots,n)$，并在各小曲面块$\Delta q_i$上任意取一点$M_i(x_i, y_i, z_i)$。当分法无限细密时（$\lambda\to 0$），下述极限如果存在，则极限值就称为在曲面$S$某一侧的对坐标的曲面积分，并记为

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_i\Delta\sigma_{i_{yz}}+Q_i\Delta\sigma_{i_{xz}}+R_i\Delta\sigma_{i_{xy}}]$$

$$=\iint_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy$$

$$=\iint_S P(x,y,z)dydz+\iint_S Q(x,y,z)dxdz+\iint_S R(x,y,z)dxdy.$$

其中，$dydz$, $dxdz$, $dxdy$，分别表示dS在yoz坐标面、xoz坐标面、xoy坐标面上的投影。

这样，不可压缩液体在稳定流动时通过曲面S的流量Q可表示为

$$Q=\iint_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy,$$

其中，$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$和$R(x, y, z)$为液体流速v在三个坐标面上的投影。

问：在学习对坐标的曲面积分定义时应注意什么问题？

答：应注意下面五个问题：

1．对坐标的曲面积分与曲面S的侧有密切的关系。在S_+侧的积分与S_-侧的积分仅相差一个负号，即

$$\iint_{S_+}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

$$=-\iint_{S_-}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

所以，在研究对坐标的曲面积分时，首先应确定曲面S的侧，并注意在S的哪侧积分。

2．在对坐标的曲面积分中，$dydz$、$dxdz$、$dxdy$分别表示

dS在yoz坐标面、xoz坐标面、xoy坐标面上的有向投影，它们是可正可负的，有时亦可为零，它们的正负取决于dS在曲面S的哪一侧。

3．为了计算积分

$$I=\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy,$$

一般可将I表示为

$$I=\iint_S Pdydz+\iint_S Qdxdz+\iint_S Rdxdy.$$

这样，我们可以分别对函数$P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$和$R(x, y, z)$在曲面S上的积分进行研究。

4．若曲面S由有限个光滑曲面组成：$S=S_1+S_2+\cdots+S_n$，则曲面S上对坐标的曲面积分等于组成S的各曲面$S_i(i=1,2,\cdots,n)$上对坐标的曲面积分之和，即

$$\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=$$

$$\iint_{S_1} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy+\cdots+\iint_{S_n} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

5．若曲面S是一个封闭的双侧曲面，则一般将在S上对坐标的曲面积分表示为

$$I=\oiint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

问：如何计算对坐标的曲面积分？

答：对坐标的曲面积分的计算是通过将曲面积分转化为二重积分去解决的。

由于组合曲面积分

$$\begin{aligned}I&=\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy\\&=\iint_S Pdydz+\iint_S Qdxdz+\iint_S Rdxdy\end{aligned}$$

因此，我们可以分别讨论等式右端的三个曲面积分的计算，下面分三种情况进行研究：

1．曲面S可表示为单值函数$z=z(x,y)$时，这时曲面S在指定的一侧与垂直于xoy坐标面的直线最多只有一个交点（图4—40）．

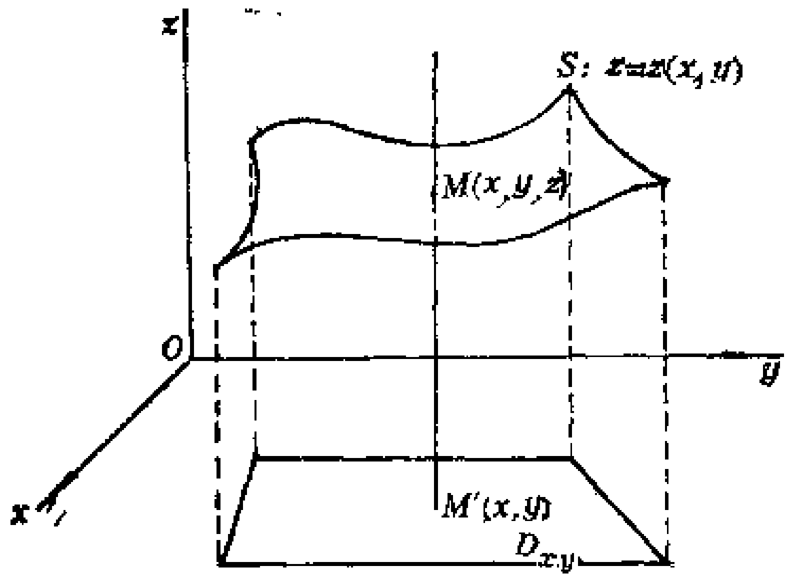


图 4—40

则 $$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

其中D_{xy}为曲面S在xoy坐标面上的投影域．当在S_+侧积分时，$D_{xy}>0$；当在S_-侧积分时，$D_{xy}<0$．

我们可以归纳出计算曲面积分$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy$的步骤：

（1）首先验证曲面S是否可以表示为单值函数$z=z(x,y)$．若不能表示为单值函数，则需要将曲面S合理地分成若干个可表示为单值函数$z=z(x,y)$的曲面，并分别在这些曲面上积分，最后相加。

（2）确定在曲面的哪侧积分，并决定$dxdy$的符号．

（3）将$z=z(x,y)$代入函数$R(x,y,z)$中，得$R[x,y,z(x,y)]$．

（4）确定曲面S在xoy坐标面上的投影，并定出积分变量x，y的积分限。

（5）计算二重积分

2．当曲面S可表示为单值函数：$x=x(y, z)$时，则类似得出：

$$\iint_S P(x, y, z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]dydz.$$

其中D_{yz}为曲面S在yoz坐标面上的投影。当在S_+侧积分时，积分取正号；在S_-侧积分时，积分取负号。具体计算步骤同上所述。

3．当曲面S表示为单值函数$y=y(x, z)$时，亦可得出：

$$\iint_S R(x, y, z)dxdz = \pm\iint_{D_{xz}} R[x, y(x, z), z]dxdz$$

其中D_{xz}为曲面S在xoz坐标面上的投影，当在S_+侧积分时，积分取正号；在S_-侧积分时，积分取负号。

问：如何计算积分：$\iint_S xyzdxdy$？其中曲面S为：$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$z\geqslant0$，截得球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧（图4—41）。

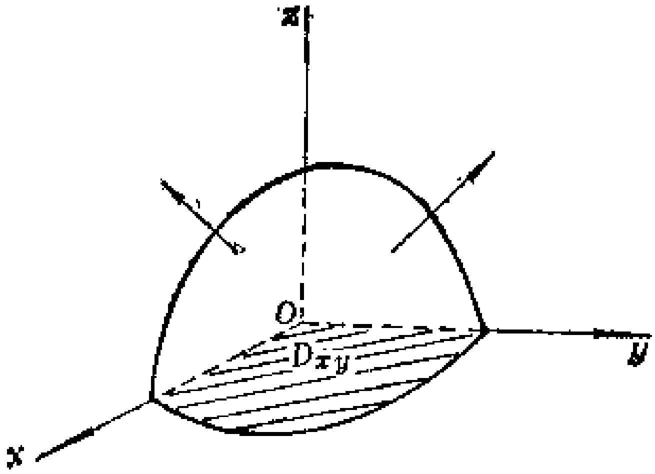


图 4—41

答：我们可依照前面归纳的解题步骤计算。

1．曲面可表示为单值函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$。

2. 在曲面外侧积分，取正值.

3. $\because \quad xyz=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$,

$$\therefore \quad \iint\limits_S xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

4. 曲面在 xoy 坐标面的投影域为

$$D_{xy}: \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x^2+y^2\leqslant 1 \end{cases}$$

5. 用极坐标计算上述二重积分，有

$$\iint\limits_S xyzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(r\cos\theta)(r\sin\theta)\sqrt{1-r^2}\,rdrd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d(\sin\theta)\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr.$$

令 $1-r^2=u^2$，则 $r^2=1-u^2$，$rdr=-udu$，

当 $r=0$ 时，$u=1$；当 $r=1$ 时，$u=0$.

$$\therefore \quad \iint\limits_S xyzdxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,r dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^0 (1-u^2)u(-udu)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (u^2-u^4)du$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{15}.$$

$$\therefore\quad \iint_S xyzdxdy=\frac{1}{15}.$$

问：如何计算曲面积分： $I=\oiint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$？

其中S为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧（图4—42）.

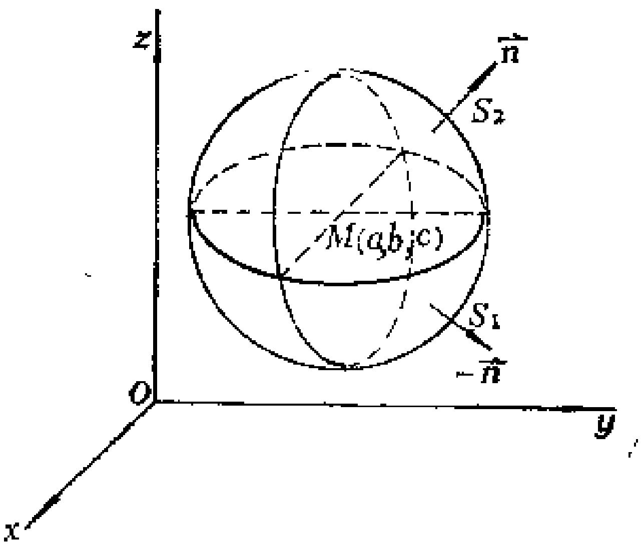


图 4—42

答：由图 4 —42可知，球面S由上半球面S_2：

$z=c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 和下半球面S_1：

$z=c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 组成。

$$\therefore\quad I=\oiint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$=\iint_{S_1} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy+\iint_{S_2}x^2dydz$$

$$+y^2dxdz+z^2dxdy.$$

$$=\left[\iint_{S_1}x^2dydz+\iint_{S_2}x^2dydz\right]+\left[\iint_{S_1}y^2dxdz+\iint_{S_2}y^2dxdz\right]$$

$$+\left[\iint_{S_1}z^2dxdy+\iint_{S_2}z^2dxdy\right]$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

我们首先计算$I_3=\iint_{S_1}z^2dxdy+\iint_{S_2}z^2dxdy$。

$\because$ 曲面S_1与S_2在xoy坐标面上的投影为

$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$ （图4—43），

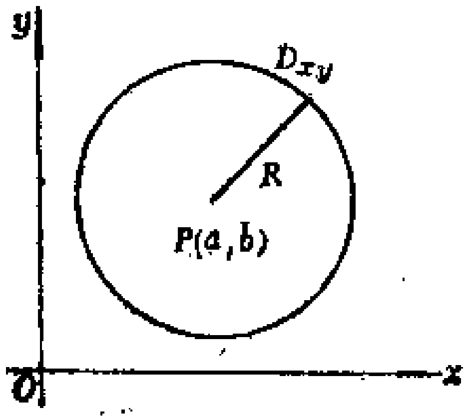


图 4—43

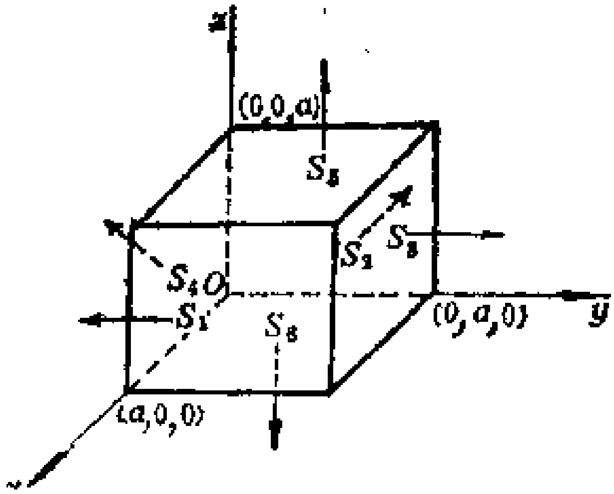


图 4—44

$$\therefore\quad I_3=\iint_{S_1}z^2dxdy+\iint_{S_2}z^2dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2dxdy$$

$$+\iint_{D_{xy}}\left[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\right]^2 dxdy$$

$$=4c\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,dxdy.$$

令$u=x-a,\quad v=y-b,\quad dx=du,\quad dy=dv,$

则 $I_3=4c\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-u^2-v^2}\,dudv.$

利用极坐标计算，有

$$I_3=4c\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

$$=-4c\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,d(R^2-r^2)$$

$$=-4c\pi\cdot\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R$$

$$=\frac{8}{3}c\pi R^3.$$

同理可知：

$$I_1=\frac{8}{3}a\pi R^3,\qquad I_2=\frac{8}{3}b\pi R^3,$$

$$\therefore\quad I=I_1+I_2+I_3=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

问：如何计算$I=\oiint_S y(x-z)dydz+x^2dxdz+(y^2+xz)dxdy$？

其中S为正方体的外侧面（图4—44）。

答：首先将积分写成三个积分和的形式。

$$I=\oiint_S y(x-z)dydz+\oiint_S x^2dxdz+\oiint_S(y^2+xz)dxdy$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

下面分别计算I_1, I_2, I_3.

（1）由于I_1的积分变量是y、z，所以应在 yoz 坐标面上确定S包含的各平面S_1, S_2, …, S_6 的投影，然后将曲面积分化为二重积分并计算。

∵　平面S_3, S_4, S_5, S_6在yoz坐标面的投影为零，

∴　$$I_1=\oiint\limits_S y(x-z)dydz$$

$$=\iint\limits_{S_1} y(x-z)dydz+\iint\limits_{S_2} y(x-z)dydz+\cdots+\iint\limits_{S_6} y(x-z)dydz$$

$$=\iint\limits_{S_1} y(x-z)dydz+\iint\limits_{S_2} y(x-z)dydz.$$

∵　S_1与S_2的法向量方向相反，且投影域均为正方形 D_{yz}，且在S_1上$x=a$，在S_2上有$x=0$，

∴　$$I_1=\iint\limits_{D_{yz}} y(x-z)dydz-\iint\limits_{D_{yz}} y(x-z)dydz$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}} y(a-z)dydz-\iint\limits_{D_{yz}} y(o-z)dydz$$

$$=\int_0^a\int_0^a y(a-z)dydz+\int_0^a\int_0^a yzdydz$$

$$=\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}$$

$$=\frac{a^4}{2}.$$

（2）∵　$I_2=\oiint\limits_S x^2dxdz$

$$=\iint_{S_1} x^2 dxdz+\iint_{S_2} x^2 dxdz+\cdots+\iint_{S_6} x^2 dxdz,$$

又∵在xoz坐标面上，S_1，S_2，S_5，S_6的投影为零，且S_3，S_4的法向量方向相反，投影域均为正方形D_{xz}，

$$\therefore\quad I_2=\iint_{D_{xz}} x^2 dxdz-\iint_{D_{xz}} x^2 dxdz=0.$$

$$(3)\ I_3=\oiint_S (y^2+xz)dxdy$$

$$=\iint_{S_1}(y^2+xz)dxdy+\iint_{S_2}(y^2+xz)dxdy+\cdots+\iint_{S_6}(y^2+xz)dxdy.$$

又∵　在xoy坐标面上，S_1，S_2，S_3，S_4的投影为零，且在S_5上有$z=a$，在S_6上有$z=0$，

$$\therefore\quad I_3=\iint_{S_5}(y^2+xz)dxdy+\iint_{S_6}(y^2+xz)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(y^2+xz)dxdy-\iint_{D_{xy}}(y^2+xz)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}(y^2+ax)dxdy-\iint_{D_{xy}}(y^2+o\cdot x)dxdy$$

$$=\int_0^a\int_0^a(y^2+ax)dxdy-\int_0^a\int_0^a y^2dxdy$$

$$=\frac{5}{6}a^4-\frac{1}{3}a^4$$

$$=\frac{1}{2}a^4.$$

$$\therefore\quad I=I_1+I_2+I_3=a^4.$$

问：下面的计算对吗？若不对，请指出错在哪里？

计算：$I=\iint\limits_{S} z\,dx\,dy$，其中$S$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

解：∵ $S=S_1+S_2$，其中S_1为上半球面，S_2为下半球面，且S_1的方程为：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，S_2的方程为：

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad I&=\iint\limits_{S_1} z\,dx\,dy+\iint\limits_{S_2} z\,dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy-\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy\\
&=0.
\end{aligned}$$

答：不对．错在仅注意曲面S_2的方程为$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，而忘掉了S_2投影的负号，正确解法应为：

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{S_1} z\,dx\,dy+\iint\limits_{S_2} z\,dx\,dy\\
&=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy-\iint\limits_{D_{xy}}\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy\\
&=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy\\
&=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,dr\\
&=-2\pi\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,d(a^2-r^2)\\
&=-2\pi\cdot\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\\
&=\frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

问：对坐标的曲面积分与对面积的曲面积分有什么联系与区别？

答： 1．两种曲面积分的区别：

（1）对面积的曲面积分：$\iint\limits_{S} f(x, y, z)dS$不考虑曲面的方向，只考虑曲面的面积，其微元$dS$表示曲面的面积元素，其值恒为正。

（2）对坐标的曲面积分：$\iint\limits_{S} P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy$，不仅要考虑曲面的方向，而且要考虑$dS$在三个坐标面上的投影$dydz$、$dxdz$和$dxdy$，其值可正可负.

2．两种曲面积分的联系：

（1）两种曲线积分的计算都是通过转化为二重积分去解决的。

（2）两种曲面积分一般有如下关系：

当确定曲面S的正侧之后，我们以任意分法将曲面S分成许多小的曲面元素dS，并在每个dS上任取一点$P(x, y, z)$，做P点的正侧法向量$\vec{n}$，则法向量的方向余弦为$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$（图4—45）.

把dS投影到xoy坐标面上，有$D_{xy}=dxdy=\cos\gamma dS$,

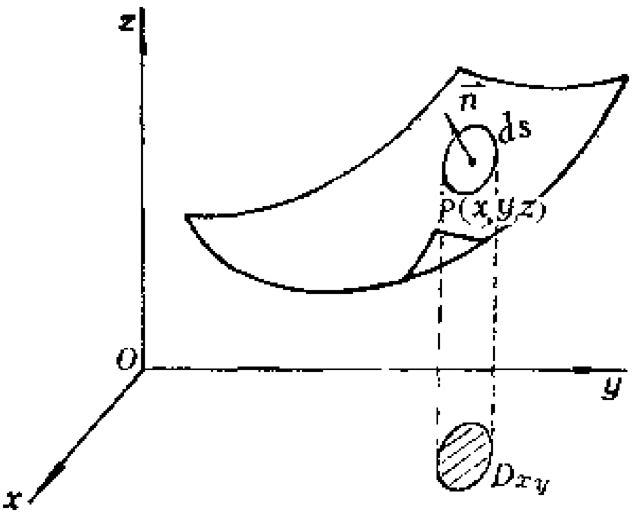


图 4—45

把dS投影到yoz坐标面上，有$D_{yz}=dydz=\cos\alpha dS$，

把dS投影到xoz坐标面上，有$D_{xz}=dxdz=\cos\beta dS$.

由此我们可得两种曲面积分的下述关系：

$$\iint_{S_+} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{S_+} P(x,y,z)dydz+\iint_{S_+} Q(x,y,z)dxdz+\iint_{S_+} R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_S P(x,y,z)\cos\alpha dS+\iint_S Q(x,y,z)\cos\beta dS+$$

$$\iint_S R(x,y,z)\cos\gamma dS$$

$$=\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS.$$

当曲面由正侧S_+变为负侧S_-时，方向余弦$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$都改变符号，由此导致整个积分改变符号。

八、曲面积分与三重积分的关系

问：曲面积分与三重积分有什么联系？

答： 在曲线积分中，格林公式把沿封闭曲线的曲线积分与由该封闭曲线为边界的平面闭域上的二重积分建立了联系。类似格林公式，我们在曲面积分中有奥斯特罗格拉特斯基公式（简称奥氏公式），这个公式建立了空间区域上的三重积分与该区域边界曲面上的曲面积分之间的联系。

假设空间闭域Ω的边界曲面S与任一平行于坐标轴的直线不多于两个交点（图4—46），且函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有下面的奥氏公式：

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\oiint_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy.$$

这里的曲面积分取在闭曲面S的外侧，三重积分是展布在空间闭域Ω上。

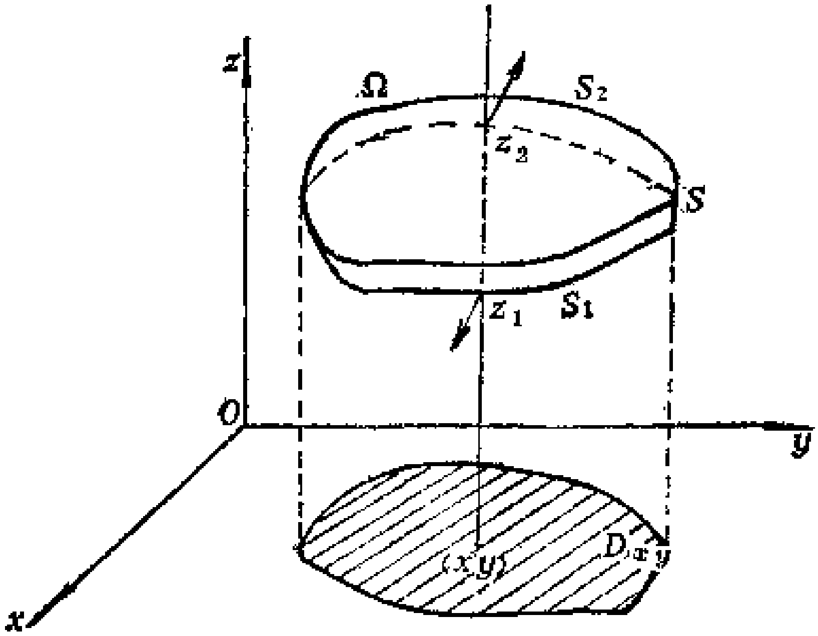


图 4—46

问：如何应用奥氏公式计算曲面积分？

答：我们可以分下面四步进行计算：

（1）检验曲面S是否与平行于坐标轴的直线最多只有两个交点。

（2）正确找出函数$P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$和$R(x, y, z)$。

（3）计算三个偏导数：$\frac{\partial P}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial z}$，并检验其是否连续。

（4）计算三重积分：$\iiint\limits_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$，最后得出曲面积分的正确答案。

问：如何应用奥氏公式计算曲面积分：

$$I=\oiint_S (x^2-yz)dydz+(y^2-xz)dxdz+(z^2-xy)dxdy?$$

其中S为正六面体的外侧曲面（图4—44）。

答：由于曲面 S 与任何平行于坐标轴的直线最多有两个交点，且 $P(x, y, z) = x^2 - yz$, $Q(x, y, z) = y^2 - xz$, $R(x, y, z) = z^2 - xy$，在曲面 S 围成的闭六面体上有一阶连续偏导数，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

则 $$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z,$$

$$\therefore \quad I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dxdydz$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz$$

$$= a^4.$$

问：如何应用奥氏公式计算曲面积分：

$$I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy?$$

其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧。

答：显然 S 与平行于坐标轴的直线仅有两个交点，且 $P(x, y, z) = x^3$, $Q(x, y, z) = y^3$, $R(x, y, z) = z^3$，并有一阶连续偏导数。

$$\because \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2,$$

$$\therefore \quad I = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dxdydz$$

$$= 3\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz.$$

应用球面坐标计算。令 $$\begin{cases} x = \gamma\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \gamma\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \gamma\cos\varphi, \end{cases}$$

$$\therefore \quad I=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{3}{5}a^5\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{12}{3}\pi a^5$$

$$=4\pi a^5.$$

问：下面的计算对吗？为什么？

求： $I=\oint\!\!\oint_S z^3dxdy+x^3dydz+y^3dxdz$，**其中$S$为球面**$x^2+y^2+z^2=a^2$.

解：
$$I=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial(z^3)}{\partial x}+\frac{\partial(x^3)}{\partial y}+\frac{\partial(y^3)}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$=0.$$

答：不对.错在没有正确找出$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$.

计算之前应首先将积分整理为标准形式，即

$$I=\oint\!\!\oint_S z^3dxdy+x^3dydz+y^3dxdz$$

$$=\oint\!\!\oint_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$$

则有

$P(x,y,z)=x^3$，$Q(x,y,z)=y^3$，$R(x,y,z)=z^3$，然后再利用奥氏公式计算（见上问）.

九、小　　结

1．曲线积分与曲面积分的主要特点在于，它们的积分区域

是曲线(平面曲线或空间曲线)或空间曲面。从概念上，我们同样可以用点函数的积分。$\int_{(\omega)} f(M)d\omega$ 去概括，即曲线积分与曲面积分也都是无穷小量和的极限。

（1）当M是平面上的点，积分区域(ω)为平面曲线 l 时，积分$\int_{(\omega)} f(M)d\omega$就是平面曲线积分：

$$\int_l P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

（2）当M是空间上的点，积分区域(ω)表示空间曲线l时，积分$\int_{(\omega)} f(M)d\omega$就是空间曲线积分：

$$\int_l P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz.$$

（3）当M是空间上的点，积分区域(ω)表示空间曲面S时，积分$\int_{(\omega)} f(M)d\omega$就是空间曲面积分：

$$\iint_S P(x, y, z)dydz+Q(x, y, z)dxdz+R(x, y, z)dxdy.$$

2．读者应特别注意对坐标的曲线积分，对坐标的曲面积分对曲线方向、曲面侧的要求。这不仅在概念上是重要的，而且在计算上也是重要的。我们建议初学者对这个问题予以必要的归纳（概念、计算公式）与练习。

3．格林公式、奥氏公式是联系重积分与曲线积分、曲面积分之间的重要公式。这些公式都可视为定积分中牛顿——莱不尼兹公式的推广。它们不仅揭示了曲线积分、曲面积分与重积分之间的内在联系，而且在计算上也有重要的地位，读者不仅要熟悉公式（注意公式的条件），而且还应熟练地应用公式。

十、思考练习题

1．计算下列对弧长的曲线积分：

（1）$\int_l \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中$l$为圆周$x^2+y^2=a^2$.

（2）$\int_l \frac{ds}{x-y}$，其中 l 为介于（0，－2）及（4，0）两点之间的直线段。

（3）$\int_l xy\,ds$，其中l是由直线 $x=0$，$y=0$，$x=4$，$y=2$ 所构成的矩形周界。

2．计算下列对坐标的曲线积分：

（1）$\int_l (x^2+y^2)dx+2xy\,dy$，其中$l$是由$(-r, 0)$到$(r, 0)$的半圆周$y=\sqrt{r^2-x^2}$.

（2）$\int_l xy\,dx+(y-x)dy$，其中l是由（0，0）到（1，1）的下列路径：

①直线$y=x$；②抛物线$y=x^2$；③抛物线$x=y^2$；④$y=x^3$.

3．判定下列积分是否与路径无关，并求积分值：

（1）$\int_l (x^2+y^2)dx+(2xy+y^2)dy$，其中 l 是由点（0，0）到（2，2）的曲线弧。

（2）$\int_l (x^2-2xy)dx+(2xy-y^2)dy$，其中$l$是由点（－1，－1）到（1，1）的直线段。

4．应用格林公式计算下列各积分：

(1) $\frac{1}{2}\oint_l xdy-ydx$，其中$l$是圆周$x^2+y^2=r^2$(正向)。

(2) $\oint_l xdy$，其中l是坐标轴和直线$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$所构成的三角形周界（正向）。

(3) $\oint_l xe^y dx+\frac{x^2}{2}e^y dy$，其中$l$为圆周$x^2+y^2=ax$.

5．计算下列对面积的曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma (2xy-2x^2-x+z)dS$，其中$\Sigma$为平面$2x+2y+z=6$在第一卦限中的部分。

(2) $\iint_\Sigma (x+y+z)\,dS$，其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$上 $z\geq h$ （$0<h<a$）的部分。

(3) $\iint_\Sigma (xy+yz+xz)dS$，其中$\Sigma$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截得的部分。

6．计算曲面积分：$\iint_S x^2y^2zdxdy$，其中S为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的下半部分外侧。

7．计算：$\oiint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$，其中$S$是由平面$x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=1$，$y=1$，$z=1$所围成的立方体表面的外侧。

8．利用奥氏公式计算曲面积分：$\oiint_S (x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中$S$为柱面$x^2+y^2=1$及平面 $z=0$，$z=3$所围成的空间区域Ω的整个边界曲面的外侧。

9．求$\oiint_S \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中$S$为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$， $z=$

1， $z=2$ 所围成的空间区域Ω的整个边界曲面的外侧。

十一、思考练习题答案或提示

1．(1) $2\pi a^2$；

(2) $\sqrt{5}\ln 2$；

(3) 24。

2．(1) $\frac{2}{3}r^3$；

(2) ① $\frac{1}{3}$，② $\frac{1}{12}$，③ $\frac{17}{30}$，④ $-\frac{1}{20}$。

3．(1) 无关，$13\frac{1}{3}$；

(2) 有关，0。

4．(1) πr^2；

(2) 3；

(3) 0。

5．(1) $-\frac{27}{4}$；

(2) $\pi a(a^2-h^2)$；

(3) $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$。

6．$\frac{2}{105}\pi R^7$。

7．3。

8．$-\frac{9}{2}\pi$。

9．$2\pi e^2$。

第五章 级 数

在学习一元微积分时，我们已接触过“级数”这一概念．例如，在讲定积分的定义时，积分和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$就是一个级数．本章将详细地介绍级数的基本理论及其在近似计算中的应用．

本章讨论常数项级数，然后重点研究幂级数和富里哀级数．

学习本章的要求：

1．正确理解级数定义，掌握级数收敛、发散的概念及其基本性质．

2．熟悉几何级数、P—级数（调和级数）的敛散条件．

3．掌握正项级数的比较判别法，熟练掌握比值判别法．

4．掌握绝对收敛和条件收敛的概念．

5．掌握交错级数的莱不尼兹判别法．

6．掌握幂级数的概念及收敛半径的求法．

7．了解幂级数的主要性质（在收敛区间内和函数连续，可逐项微分、逐项积分等），会求简单的幂级数的和函数．

8．熟悉五个初等函数的泰勒级数及它们的收敛半径，会求较简单的函数泰勒级数，会用泰勒级数进行近似计算．

9．了解三角函数系的概念、三角函数系的正交性以及在求富氏级数中的作用．

10．掌握富氏级数的概念，熟练掌握欧拉——富里哀公式，并能熟练地计算富氏系数，正确地写出相应的富氏展开式．

11．能把奇（偶）函数展成相应的正弦（余弦）级数．

12．知道狄氏收敛定理的条件和结论．

本章的重点是：级数的收敛与发散的概念；正项级数几个收敛性判别法；交错级数的判敛法；幂级数收敛半径的求法；五个

初等函数的泰勒公式以及使用富氏展开式计算富氏系数。

一、常数项级数的基本概念及性质

问：什么是常数项级数？它与数列有什么联系？

答：一般地，如果给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

把数列各项依次相加，有

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

则称上式为常数项级数（简称为级数），记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \ .$$

其中u_n称为级数的一般项(通项)，$\sum$为求和号，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$表示将数列$\{u_n\}$中的无穷多项逐项相加。因此，级数实质是无穷多个数量相加的问题。

例如，若数列为：1，2，3…，n，…，则可得级数：

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}n\ .$$

又如，若数列为：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，则可得级数：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\ .$$

综上所述，可以清楚地看到，级数与无穷数列既有区别，又有联系。数列只是将无穷多个数按一定规律进行排列，而级数则将数列中的各项相加求和。

问：什么是级数的和？如何求级数的和？

答：我们知道，级数是无穷多个数量相加，如果相加之后得到一个确定的有限数，则称这个数为该级数的和。如果相加之后不

存在一个确定的数，则称该级数无和。

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$，所以这个级数有和，且和数为1。而级数$\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots+n+\cdots$则无和。

如何正确地理解级数中无穷多个数量相加呢？有限个数量相加，可以一个一个地相加，而无穷多个数量相加就不能这么做了，为了解决这个问题，只能依靠极限去解决，即

1．先求出级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前n项和$s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$；

2．取极限：$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$

若极限存在且极限值为s，则级数和为s，即$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$；

若极限不存在，则级数无和。

例如，求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的和。

解：（1）先求s_n。

$$s_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n},$$

（2）取极限。

$$\because\qquad \lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1\ ,$$

$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和数为1，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 .$$

问：如何理解级数的收敛与发散？

答： 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前n项和为s_n。

若 $\lim_{n\to\infty}s_n$

存在，且极限值为s，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为收敛的，且收敛于s；否则称级数为发散的，显然，发散级数无和。

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$为收敛的，且收敛于1；而级数$\sum_{n=1}^{\infty}n$为发散的。

一般地，将级数的收敛性与发散性统称为级数的敛散性。研究、判断一个级数的敛散性是一个非常重要的问题，这在下面还要详细讨论。这里我们可以从级数敛散性的概念上去判断一个级数的敛散性，其步骤为：

1．求出级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的前n项和s_n；

2．求极限：$\lim_{n\to\infty}s_n$，若极限存在，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，否则发散。

例如，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$的敛散性。

解： $\because$ $u_1=\frac{1}{1\cdot2}=1-\frac{1}{2}$ ，

$u_2=\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ，

$$u_3=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore\quad s_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，且收敛于 1 。

问：收敛级数有哪些重要性质？在学习这些性质时应注意什么问题？

答：收敛级数的重要性质有：

性质 1：在级数前面加上或去掉有限项，不会影响级数的敛散性。

这个性质进一步指出了有限项和与无穷多项和的本质区别。由于级数是无穷多项相加求和，所以级数的收敛性不取决于级数前面有限项的变化，而是取决于级数中充分远以后各项的变化情况。

应该注意的是，上述变化虽不影响级数的敛散性，但一般来说，级数如果收敛，则和可能要改变。

性质2：收敛级数的各项同乘以一个常数后所成的级数仍收敛。即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 s，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$（$c$为常数）收敛于 cs。

这个性质指出，将级数各项同乘以一个常数后，不改变级数的收敛性，显然和数是要改变的。

应该注意的是，若级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$收敛， 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$则不一定收敛。

例如，级数$\sum_{n=1}^{\infty} c\frac{1}{n}$ （$c=0$） 收敛于零，但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。一般有下面的结论：

级数的各项同乘以一个非零常数，则级数的敛散性不变。

性质 3：两收敛级数逐项相加或相减所成的级数仍收敛。即$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于u、v，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于$u \pm v$。

应该注意的是，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$不一定发散。

例如，级数$1+1+\cdots+1+\cdots$发散，

级数$(-1)+(-1)+\cdots+(-1)+\cdots$发散，

而$[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots+[1+(-1)]+\cdots$则是收敛的。

另外，性质 3 也指出了判断级数收敛的一个充分条件。即若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$必收敛。

例如，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$的敛散性。

解：$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛，

$$\therefore \quad \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\text{收敛.}$$

性质4：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛于 s，则将级数的项依次加括号后所成的级数仍然收敛于 s。

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = s$，

则按下述每两项加括号后得的级数

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_n+u_{n+1})+\cdots$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

仍收敛，且收敛于 s。

应该注意的是，若一个收敛级数原来有括号，去括号后得到的新级数就不一定收敛了。

例如，$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$

收敛于零，去掉括号后得级数：

$$1-1+1-1+\cdots$$

为发散的。

问：收敛级数的必要条件是什么？在学习必要条件时应注意什么问题？

答：级数收敛的必要条件是级数的一般项趋于零。即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{。}$$

例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，则必有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \text{。}$$

收敛级数的这个性质是非常重要的，它不仅告诉我们，一个

级数如果收敛，则其通项必趋于零，而且还指出判断级数发散的充分条件，即若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必发散。

例如，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$的敛散性。

解：∵
$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0,$$

∴ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$发散。

应该注意的是，级数一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件。也就是说，不能因为某一个级数的一般项趋于零，就肯定这个级数收敛。

例如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的一般项趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

但该级数是发散的。

二、正项级数及其收敛判别法

问：什么是正项级数？正项级数收敛的充要条件是什么？

答：如果级数的各项均为正数或零，则称该级数为正项级数。

例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\cdots$$

都是正项级数；而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi,\quad \cdots$$

不是正项级数。

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为一个正项级数($u_n\geqslant 0$)，则它的前n项和s_n肯定是一个单调增加的数列，即：

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots.$$

这时，若数列s_n有上界，则根据“数列单调有界必有极限”的准则，可知数列s_n必有极限，即：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

此时，级数收敛于s，

反之，如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于s，即：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

此时，可知s_n必有界。因此，正项级数收敛的充要条件为：

“正项级数的前n项和数列s_n有界”。

由于判断一个级数前n项和数列的有界性是比较困难的，所以，正项级数收敛的充要条件的重要性主要体现在理论上。至于具体判断一个级数的敛散性还要依靠另外一些简便易行的判别法。

问：什么是正项级数收敛的“比较判别法”？在应用“比较判别法”时应注意什么问题？

答：我们将下面的法则称为正项级数敛散性的“比较判别法”：

设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$为两个正项级数，且有

$$u_n\leqslant v_n\ (n=1,2,\cdots),$$

则当$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛；

当$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$也发散。

通过法则可以看出，所谓“比较判别法”，就是将一个级数与一个已知敛散性的级数相比较，从而得到该级数的敛散性。因此，选择一个易于和某个级数比较，且已知敛散性的级数是至关重要的。

应该注意的是，在判断一个级数的收敛性时，应选择一个通项比原级数略大的已知级数做标准；在判断一个级数的发散性时，应选择一个通项比原级数略小的已知级数做标准。这在一定程度要依赖于经验，我们建议读者多做一些这方面的练习。

例如，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$的敛散性。

解：　$\because$　级数$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{n(n+1)}$是收敛的，

而　$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},$$

$\therefore$　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$收敛。

“比较判别法”还有另一种非常实用的极限形式，即设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$为两个正项级数，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\quad(0\leqslant l\leqslant+\infty),$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或发散。

我们可用此种方法判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$的敛散性。

$\because$　级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$是收敛的，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1,$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$收敛。

问：如何用“比较判别法”判别下列级数的敛散性？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$；　　　（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$；　　　（4）$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\sin\frac{1}{3^n}$．

答： 由于应用“比较判别法”的关键在于选择一个易于比较，且已知敛散性的级数，因此，我们熟知敛散性的级数越多，应用此法就越方便.下面我们首先用“比较判别法”证明调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的发散性，以后就可以应用它做发散级数的判别标准。

解：（1）∵ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$是发散的，将调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的第3、4项，第5、6、7、8项，第9、10、…，16项，…依规律加括号，得

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots,$$

又 $$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},\ \cdots$$

$\therefore\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

（2）$\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\ ,$$

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$为发散的。

（3）$\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是发散的，

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$
$$=1,$$

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$为发散的。

（4）$\because$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$是收敛的，

又 $2^n\sin\frac{1}{3^n}\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

$$\therefore \text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} \text{为收敛的。}$$

问：什么是"比值判别法"？在应用"比值判别法"判断正项级数敛散性时应注意什么问题？

答：我们已经看到，应用"比较判别法"可以判断一个正项级数的敛散性，但由于必须根据所给级数的特点，选择一个适于比较的已知级数去进行判别，所以应用这个方法是不方便的。我们希望有这样的判别法，即

（1）不依赖于其它级数，就靠所给级数本身进行判别；

（2）判别法应用的范围应尽可能的广泛；

（3）判别的方法简单易行。

符合上述三个条件的判别法有"比值判别法"、"根值判别法"…，下面首先学习"比值判别法"：

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

则当 $l < 1$ 时，级数收敛，

当 $l > 1$（或 $l = \infty$）时，级数发散；

当 $l = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散。

例如，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 的敛散性。

解： $\because \quad u_n = \frac{1}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$

$$\text{又} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$=0$$

$\therefore$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$为收敛的。

通过例题我们可以看到，"比值判别法"比"比较判别法"简单易行。

在应用"比值判别法"时应注意：

（1）一定用第$n+1$项去比第n项，然后取$n\to\infty$时的极限，即$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$；如果用第$n$项去比第$n+1$项，再取极限就错了.

（2）当$l=1$时，"比值判别法"失效，应选用其它方法进行判别。

（3）当级数的一般项u_n是某数的阶乘、连乘、乘方等形式时，应用"比值判别法"比较方便。

问：如何用"比值判别法"判别下列各级数的敛散性？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln 3)^{n-1}$；（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

答：应用"比值判别法"判别正项级数的敛散性，大体可分下面三步进行，即

（1）确定所给级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的第n项u_n与第$n+1$项u_{n+1}；

（2）求极限：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$；

（3）根据l的不同情况确定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性。

解：（1）$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的第$n$项为$\frac{1}{n}$，第$n+1$项为$\frac{1}{n+1}$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ ，

所以，“比值判别法”失效，实际上应用“比较判别法”已知该级数是发散的。

（2）∵ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln3)^{n-1}$ 的第n项为$(\ln3)^{n-1}$，第 $n+1$ 项为$(\ln3)^n$，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln3)^n}{(\ln3)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln3$$

$$=\ln3>1,$$

∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln3)^{n-1}$为发散的。

（3）∵ $u_n=\dfrac{5^n}{n!}$ ， $u_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$ ，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{5^n}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}$$

$$=0,$$

∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n!}$收敛。

问：下面的解法对吗？为什么？

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$ 的敛散性。

解：∵ $u_n=\frac{2^n}{n!}$， $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$．

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}$$

$$=\infty。$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$是发散的。

答：上面解法是错误的，主要错在将极限：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 写成 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}$了，正确解法应为：

∵ $u_n=\frac{2^n}{2!}$， $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$，

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}$$

$$=0，$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$为收敛的。

问：什么是"根值判别法"？如何应用"根值判别法"判别级数的敛散性？

答：一般把下面的判别法称为"根值判别法"，即如果正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足条件：

$$\lim_{u\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\ ,$$

则当 $l<1$ 时，级数收敛；

当 $l>1$ 时，级数发散；

当 $l=1$时，级数可能收敛也可能发散。

从"根值判别法"可以看出，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的一般项u_n是n次方形式时，应用"根值判别法"比较方便，具体步骤为：

（1）确定所给级数的一般项u_n；

（2）求极限：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ ；

（3）根据 l 的不同情况，确定级数的敛散性。

例如，判断级数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

的敛散性。

解： ∵ 原级数的一般项为：$u_n=\dfrac{1}{n^n}$ ，

又 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$=0\ .$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$为收敛的。

问：如何用"根值判别法"判别下列各级数的敛散性？

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$；　（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{[\ln(n+1)]^n}$.

答： 上述各级数的一般项都是n次方形式，所以可以应用" 根值判别法" 进行判别。

解：（1）∵ $u_n=\frac{n^n}{2^n}$，

又
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}=\infty,$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n}$是发散的。

（2）∵ $u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$，

又
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2},$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$收敛。

（3）∵ $u_n=\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$，

又
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0,$$

∴ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$收敛。

三、交错级数及其收敛判别法

问：什么是交错级数？它有什么特点？

答：所谓交错级数就是级数中的各项是正负交错的，一般交错级数可表示为：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

或 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots,$$

其中u_1，u_2，…都是正数，例如，下面各级数都是交错级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}-\frac{1}{15}+\cdots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=0-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}-\cdots,$$

从上面例子中可以看出，交错级数的最大特点就是，在级数中正项和负项按规律交错排列。

问：如何判别交错级数的敛散性？

答： 因为在交错级数中有无穷多个正项，同时又有无穷多个负项，由于正、负抵消，而使交错级数比较容易收敛。例如，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，而交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$则是收敛的。

为了判别交错级数的敛散性，一般有下面的判别法——莱不尼兹判别法：

如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$（或$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$）满足条件：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ $(u_n\geqslant 0)$；

（2） $u_n\geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，

则该级数收敛。

判别法告诉我们，如果交错级数的一般项（除去符号）u_n趋于零$(n\to\infty)$，且u_n为单调递减的，则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛。

例如，交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是收敛的，这是因为：

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

$$且\quad u_n=\frac{1}{n}>u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\quad.$$

问：下面的交错级数收敛吗？为什么？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$；　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$。

答：我们可以根据莱不尼兹判别法的两个条件去检验上述各交错级数的敛散性。

解：（1）∵ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+2)}=0,$

又 $$u_n=\frac{1}{n(n+2)}>u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+3)},$$

$$\therefore\quad 级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}收敛。$$

（2）∵ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0,$

又 $$u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}>u_{n+1}=\frac{1}{\ln(n+2)},$$

$$\therefore\quad 级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}收敛。$$

（3）∵ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,$

为了证明$u_n=\frac{\ln n}{n}$为单调减函数，可设函数

$$y=\frac{\ln x}{x}.$$

$$\because \quad y'=\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$\therefore$ 当$x>e$后，$y'<0$，此时函数$y=\dfrac{\ln x}{x}$为单调减函数。

$\therefore$ 当$n\geqslant 3$后，$u_n=\dfrac{\ln n}{n}$单调递减。

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$收敛。

四、绝对收敛与条件收敛

问：什么是绝对收敛级数？什么是条件收敛级数？

答：设有级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{①}$$

其中$u_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数，则其各项的绝对值组成一个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+ \tag{②}$$

如果级数②收敛，则称级数①为绝对收敛级数。如果级数①收敛，而级数②发散，则称级数①为条件收敛级数。

例如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^n}$就是绝对收敛级数，这是因为将该级数各项取绝对值后得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

是收敛的。我们可以用正项级数判别法进行判别，即

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\ ,$$

$$\therefore \quad 级数\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}为收敛的。$$

又如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$为条件收敛级数，这是因为根据交错级数收敛的判别法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$收敛，而将该级数各项取绝对值后所得的级数。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

为发散的。

问：绝对收敛级数有哪些重要性质？

答： 绝对收敛级数具有一些条件收敛级数所不具有的性质，下面我们介绍绝对收敛级数的一个重要性质．在学习这一性质之前，首先学习一个重要定理：

定理1： 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的各项的绝对值所组成的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛，且称为绝对收敛级数。

这个定理使许多任意项级数收敛性的判别问题，转化为正项级数收敛的判别问题．如果用正项级数判别法证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$为收敛的，则原级数必然收敛。

定理2： 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为绝对收敛级数，则级数不因改变项的

位置而改变它的和。

这个定理告诉我们，绝对收敛级数具有可交换性。

应该注意的是：条件收敛级数不具备这个性质，也就是说，条件收敛级数内各项的位置不能任意交换，否则影响该级数的收敛性。

问：如何判别一个级数的绝对收敛性？

答：由于将任何一个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的各项取绝对值后，得到的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$都是正项级数，所以，我们可以用正项级数的各种判别法去判别级数的绝对收敛性。

应该注意的是，当证明级数$\sum\limits_{n=1}^{8} |u_n|$发散时，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是收敛还是发散是不能肯定的。此时还要应用交错级数收敛的判别法判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是否收敛。

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则该级数为条件收敛；如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$亦发散，则该级数发散。

例如，判别级数$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$的绝对收敛性。

解：$\because$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$为发散的。

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散。

$\because$ $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$为发散的。

问：如何判别下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$。

答： 我们可依下面两个步骤去进行判别，即

1．先判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$的收敛性，若收敛则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。

2．若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，再依交错级数的莱不尼兹判别法判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性。

解：（1）$\because$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为发散的。

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$为发散的。

而 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ，

∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 收敛，该级数为条件收敛级数.

（2）∵ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$，

又 $$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\cdot 3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3},$$

∴ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛.

五、幂 级 数

问：什么是函数项级数？在学习函数项级数时应注意什么问题？

答： 若 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在区间 (a,b) 内的函数，则称序列

$$u_1(x),\ u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$$

为函数序列。把函数序列的各项相加，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots,$$

我们称这个各项都是变量 x 的函数的级数为定义在区间 (a, b)

内的函数项级数。

例如，下列各级数都是函数项级数：

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots;$$

$$\ln x+2\ln x+3\ln x+\cdots+n\ln x+\cdots。$$

在学习函数项级数时应注意下面三个问题，即

（1）定义在区间（a, b）内的一个函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，对于区间（$a$, b）内的某一个数值x_0，就可以得级数内各个函数的值，而由这些函数值就组成了一个常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots;$$

对区间（a, b）内的另一个数值x_1，函数项级数中的各函数又可得到相应值，由这些函数值又组成了另一个常数项级数

$$u_1(x_1)+u_2(x_1)+\cdots+u_n(x_1)+\cdots。$$

因此，前面学习的常数项级数的敛散性的判别法，可以作为研究函数项级数敛散性的基础。

（2）我们已经知道，常数项级数要么收敛，要么发散，两者必居其一.而函数项级数则不然，由于函数项级数中的各项均为x的函数，所以，同一个函数项级数在不同的点其敛散性就可能不同？同一函数项级数有可能在点x_0处是收敛的，而在点x_1处则是发散的.因此，今后我们不说函数项级数是收敛的还是发散的，而是说该级数当x取哪些数值时收敛，取哪些数值时发散。

（3）由于函数项级数中的各项都是x的函数，所以，如果函数项级数在某个范围内收敛的话，则它的和也必然是一个函数，一般记为$s(x)$。

问：什么是函数项级数的收敛域与发散域？

答：定义在区间（a, b）内的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

对于$x_0\in(a, b)$，可得一常数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots,$$

此时级数可能收敛，也可能发散。如果收敛，则点x_0称为原函数项级数的收敛点；如果发散，则点 x_0 称为原函数项级数的发散点。并称区间 (a, b)内的收敛点的全体为函数项级数的收敛域；称 (a, b) 内发散点的全体为函数项级数的发散域。

研究函数项级数的一个重要内容，就是确定给定的函数项级数的收敛域与发散域。

问：如何理解函数项级数的和？

答：我们已经知道，对应于函数项级数收敛域中的任意一点 x，函数项级数成为一个收敛的常数项级数，因而有确定的和。对于收敛域上的不同点，同一个函数项级数就存在有不同的和。这样，在收敛域上，函数项级数的和就是 x 的函数，我们称为函数项级数的和函数，记为$s(x)$，即

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots.$$

明显可以看出，和函数$s(x)$的定义域就是函数项级数的收敛域。

如果把函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 n 项和记为 $s_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x).$$

我们可以应用这个方法求出一些函数项级数的和函数。

例如，求函数项级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

的和函数。

解： $\because$ $s_n = \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}\right)$,

显然，当$|x|<1$时，原函数项级数收敛，和函数为

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{1-x};$$

当$|x|>1$时，函数项级数发散。

∴在收敛域$(-1, 1)$内，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$收敛于和函数

$s(x)=\frac{1}{1-x}$，即在$(-1, 1)$内，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

一般地，我们把$s(x)-s_n(x)$称为函数项级数的余项，记为$r_n(x)$，即

$$r_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

显然，函数项级数的余项$r_n(x)$只有在收敛域上才有意义，且有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}r_n(x)&=\lim_{n\to\infty}[s(x)-s_n(x)]\\&=s(x)-\lim_{n\to\infty}s_n(x)\\&=0.\end{aligned}$$

问：什么是幂级数？

答：我们把形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad ①$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \qquad ②$$

的函数项级数称为幂级数。其中a_0，a_1，a_2，$\cdots a_n\cdots$都是常数，称为幂级数的系数。

例如，下面的函数项级数都是幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$- \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} + \cdots.$$

在幂级数②中，若令 $t = x - x_0$，就可将其转化为幂级数①的形式。因此，今后我们将重点讨论形式①的幂级数。

由于幂级数中的每一项都是 x 的正整数次幂的幂函数，所以，幂级数可以很方便地进行一些微分、积分等运算。而且下面将会看到幂级数的收敛域具有很明显的特点，这使我们有可能很方便地确定出幂级数的收敛域。同时，幂级数的应用也非常广泛，所以，我们将重点研究这种简单且常用的函数项级数——幂级数。

问：幂级数的收敛域有什么特点？

答：对任何一个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

其收敛域都具有下面两个特点：

（1）收敛域非空。也就是说，任何一个幂级数至少都在 $x = 0$ 点收敛，且收敛于a_0。

（2）幂级数的收敛域总是以原点为中心的对称区间（我们将收敛域仅为 $x = 0$ 点或收敛域为整个数轴也视为以原点为中心的对称区间）。一般地，有下面的定理：

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ （$x_0 \neq 0$）时收敛，则适合不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 都使该级数绝对收敛；如果当 $x = x_0$（$x_0 \neq 0$）时发散，则适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 都使该级数发散。

也就是说，如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$不是仅在$x=0$点收敛，也不是全在数轴上收敛，则必然存在一个完全确定的点$x_0=R$，使得

当$|x|<R$时，幂级数绝对收敛；

当$|x|>R$时，幂级数发散；

当$|x|=R$时，幂级数可能收敛也可能发散。

这同样是说，幂级数的收敛域必然是以原点为中心的对称区间（如图5—1）。

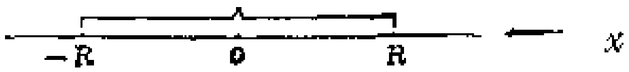


图 5—1

一般地，称常数R为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径。

例如，幂级数$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$的收敛半径为$R=1$。

问：如何求幂级数的收敛半径和收敛域？在计算时应注意什么问题？

答：我们可以依照定理，按下面四个步骤去求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径。

（1）求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，其中$a_{n+1}$与$a_n$为幂级数的第$n$项与第$n+1$项的系数。

（2）若极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，且$\rho\neq0$，则幂级数收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，则幂级数的收敛半径为$R=+\infty$。此

时，幂级数在整个数轴上绝对收敛。

（4）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$，则幂级数的收敛半径$R=0$.此时，幂级数仅在 $x=0$ 点收敛，在其余点均发散。

应注意的是：幂级数的收敛域与收敛半径意义不同，求出一个幂级数的收敛半径R后，不能立刻就断定该级数的收敛域为$(-R, R)$ $(R=\dfrac{1}{\rho},\ \rho\neq0)$.

应特别注意判定$x=-R$和$x=R$两点幂级数的收敛性，以最后确定幂级数的收敛域是$(-R, R]$，$[-R, R)$，$(-R, R)$ 还是$[-R, R]$。

例如，求幂级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛域。

解：∵ $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$,

∴ 幂级数的收敛半径为：$R=\dfrac{1}{\rho}=1$.

又 ∵ 当$x=1$时，原级数变为常数项级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

级数收敛。

又 当$x=-1$时，原级数变为常数项级数

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

级数发散。

∴ 原幂级数的收敛域为$(-1, 1]$。

问：如何确定下列各幂级数的收敛域？

(1) $\frac{x}{1.3}+\frac{x^2}{2.3^2}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$;

(2) $\frac{x-3}{1-3}+\frac{(x-3)^2}{2-3^2}+\cdots+\frac{(x-3)^n}{n-3^n}+\cdots$;

(3) $\lg x+(\lg x)^2+\cdots+(\lg x)^n+\cdots$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

答：为了确定幂级数的收敛域，可以先求出幂级数的收敛半径R，然后再分别研究$x=-R$和$x=R$两点幂级数的敛散性，最后确定幂级数的收敛域。

应该注意的是，幂级数的收敛域是使幂级数收敛的自变量x的变化范围，所以，在遇到比较复杂的第②种形式的幂级数时，应通过解关于x的不等式才能最后求出幂级数的收敛域。

解：(1) ∵ $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$，$a_n=\frac{1}{n\cdot 3^n}$，

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}$$
$$=\frac{1}{3}.$$

∴ $R=3$，即原级数在$(-3, 3)$内收敛。

∵ 当$x=-3$时，原级数为：

$$\frac{-3}{1.3}+\frac{(-3)^2}{2.3^2}+\frac{(-3)^3}{3.3^3}+\cdots\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

∴ 级数收敛。

∵ 当$x=3$时，原级数为：

$$\frac{3}{1.3}+\frac{3^2}{2.3^2}+\frac{3^3}{3.3^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 3^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

∴　级数发散。

∴　原级数的收敛域为：$[-3, 3)$。

（2）∵原级数为 $x-3$ 的幂级数，

又　$a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)-3^{n+1}}$，$a_n=\dfrac{1}{n-3^n}$，

且　$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-3^n}{(n+1)-3^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{3^n}-1}{\dfrac{n+1}{3^n}-3}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

∴　$R=3$，即原级数在

$$-3<x-3<3,$$

即　$0<x<6$

的范围内收敛。

∵　当 $x=0$ 时，原级数为：

$$\frac{-3}{1-3}+\frac{(-3)^2}{2-3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n-3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\dfrac{n}{3^n}-1},$$

∴　级数发散。

∵　当 $x=6$ 时，原级数为：

$$\frac{3}{1-3}+\frac{3^2}{2-3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n-3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\dfrac{n}{3^n}-1}=-1,$$

∴　级数发散。

∴　原级数的收敛域为 $(0, 6)$。

（3）∵原级数为 $\lg x$ 的幂级数，

又　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，

$\therefore\quad R=1$，即原级数在

$$-1<\lg x<1$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{10}<x<10$$

的范围内收敛。

$\because\quad$ 当 $x=\frac{1}{10}$ 时，原级数为：

$$\lg\frac{1}{10}+\left(\lg\frac{1}{10}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n,$$

$\therefore\quad$ 级数发散。

$\because\quad$ 当 $x=10$ 时，原级数为：

$$\lg 10+(\lg 10)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}1^n,$$

$\therefore\quad$ 级数发散。

$\therefore\quad$ 原级数的收敛域为 $\left(\frac{1}{10},\ 10\right)$。

（4）$\because\quad$ 原级数为 $\frac{1-x}{1+x}$ 的幂级数，

又 $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}$$

$$=1,$$

$\therefore\quad R=1$，即原级数在

$$-1<\frac{1-x}{1+x}<1$$

$$\Rightarrow\quad -1<\frac{2}{1+x}-1<1$$

$$\Rightarrow\quad 0<\frac{2}{1+x}<2$$

$$\to \quad 0<\frac{1}{1+x}<1$$

$$\Rightarrow \quad x>0$$

的范围内收敛。

∵ 当 $x=0$ 时，原级数为：

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2\cdot 2+1}+\frac{1}{2\cdot 3+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

∴ 级数发散。

∴ 原级数的收敛域为（0，$+\infty$）。

问：幂级数的和函数有什么性质？

答：一般来说，幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的和函数$s(x)$具有下面三个重要性质：

性质1：幂级数的和函数 $s(x)$ 在收敛区间内是个连续函数。

性质2：幂级数的和函数 $s(x)$ 在收敛区间内是个可导函数，且可对幂级数逐项求导，

即

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

逐项求导后所得的幂级数与原幂级数具有相同的收敛半径。

性质3：幂级数的和函数$s(x)$在收敛区间内是个可积函数，且可对幂级数逐项积分，

即

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

逐项积分后所得的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径。

例如，幂级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

在区间（－1，1）内收敛于和函数$s(x)=\frac{1}{1-x}$。

对原级数逐项求导后得到的幂级数：

$$1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$$

在区间（－1，1）内收敛于和函数：

$$s(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

若对原级数逐项积分后得到的幂级数：

$$x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots$$

在（－1，1）内收敛于和函数：

$$\int_0^x s(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x).$$

六、函数展成幂级数

问：什么是台劳级数？台劳级数与台劳公式有什么联系？

答：如果函数$f(x)$在点x_0处附近具有各阶导数，则称级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数$f(x)$在点x_0处的台劳级数。

例如，函数$f(x)=e^x$在点$x_0=0$处的台劳级数为

$$f(0)+f'(0)\ (x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+\cdots$$

$$=e^0+e^0x+\frac{e^0}{2!}x^2+\cdots+\frac{e^0}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

台劳级数与一元微积分中学过的台劳公式有着密切的联系。

我们知道，如果函数$f(x)$在点x_0处附近具有n阶导数，则可以用一个n次多项式

$$f(x_0)+f'(x_0)\ (x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad ①$$

去近似表示函数$f(x)$，即

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad ②$$

且n次多项式①与函数$f(x)$相差一个余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ （ξ为x与x_0之间的某个值）。

因此，函数$f(x)$可表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad ③$$

我们称③式为函数$f(x)$在点x_0处的台劳公式。

明显可以看出，若台劳公式中的余项$R_n(x)\to 0(n\to\infty)$，则

台劳公式就成为台劳级数了.

即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

由此可以得到，若函数$f(x)$在点x_0处附近有各阶导数，且余项$R_n(x)\to0\ (n\to\infty)$，则可以将函数$f(x)$唯一地表示成台劳级数，或唯一地用台劳级数表示函数$f(x)$。

例如，函数$f(x)=e^x$在点$x_0=0$处附近有各阶导数，且

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$

$$=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\longrightarrow0\quad(n\to\infty),$$

∴ 在点$x_0=0$处，$f(x)=e^x$可用台劳级数表示为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

且这种表示形式是唯一的.

问：什么是马克劳林级数？它与台劳级数有什么关系？

答：如果函数$f(x)$在点$x_0=0$处附近有各阶导数，则称级数

$$f(0)+f'(0)\ (x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+\cdots$$

$$=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

为函数$f(x)$的马克劳林级数.

若当$n\to\infty$时，$R_n(x)\to0$，则函数$f(x)$可用马克劳林级数表示为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

很明显，马克劳林级数是台劳级数当$x_0=0$时的一个特例。

例如，函数$f(x)=e^x$在点$x_0=0$处的台劳级数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

就是$f(x)=e^x$的马克劳林级数。

由于将函数$f(x)$在点$x_0=0$处展开为马克劳林级数是非常方便的，所以，今后一般都重点研究马克劳林级数。

问：如何将一个函数展开成x的幂级数（马克劳林级数）？

答： 由于多项式函数是函数中最简单、最易于研究的，所以，为了研究某些函数的性质，常将这些函数展开成x的幂级数，而且这些函数的幂级数展开式有着广泛的应用。

将函数$f(x)$展开为马克劳林级数（即x的幂级数），一般分为“直接展开法”与“间接展开法”，我们首先学习“直接展开法”.

所谓“直接展开法”，就是按照下列步骤将函数$f(x)$展开成x的幂级数：

1．求出$f(x)$的各阶导数$f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(n)}(x)$，…，如果在点$x=0$处某阶导数不存在，就停止计算。

例如，在点$x=0$处，函数$f(x)=x^{\frac{7}{3}}$的三阶导数不存在，则它就不能展开成x的幂级数。

2．求出函数$f(x)$及其各阶导数在点$x=0$处的值：

$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$，…，$f^{(n)}(0)$，….

3．写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出该级数的收敛半径R。

4．证明在收敛区间$(-R,R)$内，余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\text{（}\xi\text{是在0与}x\text{之间的某值），}$$

当$n\to\infty$时趋于零。若$R_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$，则函数$f(x)$的x的幂级数为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

例如，将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数。

解：∵ $f(x)=\sin x$,

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$\cdots$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$\cdots$.

又∵ $f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,$
$f^{(4)}(0)=0,\quad f^{(5)}(0)=1,\quad f^{(6)}(0)=0,\quad f^{(7)}(0)=-1,$
$\cdots$

∴ $f(x)=\sin x$在点$x=0$处x的幂级数为

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x_7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

显而易见，上述级数的收敛半径$R=+\infty$。

$$∵\quad |R_n(x)|=\left|\frac{\sin\left[\xi+\frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

∴ 在$(-\infty,+\infty)$内，$f(x)=\sin x$的马克劳林级数为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

问：如何求函数$f(x)=(1+x)^m$关于x的幂级数展 开式（m为实

数）?

答：我们可以应用"直接展开法"求$f(x)$的马克劳林级数.

$\because$ $f(x)=(1+x)^m$,

$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}$,

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$,

…

$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$,

…

又 $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1)$,

$f'''(0)=m(m-1)(m-2)$,

…

$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$,

…

$\therefore$ $f(x)=(1+x)^m$在点$x=0$处x的幂级数为

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

$$\because\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}}{\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|$$

$$=1,$$

$\therefore$ 该级数的收敛半径$R=1$.

$\because$ 在$(-1,1)$内，有

$$R_n(x)\longrightarrow 0\ (n\to\infty),$$

$\therefore$ 在$(-1,1)$内，$f(x)=(1+x)^m$的马克劳林级数为

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

问：什么是幂级数的"间接展开法"？

答：前面我们用"直接展开法"求函数$f(x)$的马克劳林级数，需要求出函数各阶导数值、级数的收敛区间，且在收敛区间内研究余项$R_n(x)$是否趋于零。这种方法的计算量大，复杂，容易出错误，而且一般来说研究$n\to\infty$时余项$R_n(x)$的极限是否为零也是一件非常困难的事情。所以，一般求函数的马克劳林级数不用这种方法，而是利用一些已知的函数展开式，通过代换、四则运算、逐项求导、逐项积分等方法，间接地求出函数的幂级数展开式。这样做不仅计算简单，而且根据函数展开成幂级数的唯一性，避免研究余项。下面通过例题说明这种"间接展开法"。

例如，求函数 $f(x)=\cos x$ 的 x 的幂级数。

解：∵ $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$(-\infty<x<+\infty)$，

将上式逐项求导，有：

$$(\sin x)'=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$(-\infty<x<+\infty)$，

∴ $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

又如，将 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

解：∵ $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

∴ 将$-x^2$代入有：

$$\frac{1}{1-(-x^2)}=1+(-x^2)+(-x^2)^2+\cdots+(-x^2)^n+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots(-1<x<1).$$

问：如何求下列各函数的x的幂级数？

（1）$f(x)=\text{arc tg}x$；　（2）$f(x)=\ln x$在$x=1$处；

（3）$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　（4）$f(x)=\sin^2 x$；

（5）$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$；（6）$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$.

答：我们用"间接展开法"求上述各函数的x的幂级数展开式。

解：（1）∵ $\text{arc tg}x=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$,

又 $$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots(-1<x<1)$$

∴ 利用幂级数逐项积分的性质，有：

$$\begin{aligned}\text{arc tg}x&=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx\\&=\int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots)dx\\&=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx-\cdots+\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx+\cdots\\&=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots.\end{aligned}$$

（2）∵ $g(x)=\ln(1+x)$在$x=0$处的幂级数展开式为：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$(-1<x<1)$,

令$y=1+x$，则$x=y-1$，代入上式有

$$\ln y=(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{(y-1)^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

∵ $-1<x<1$， 即 $-1<y-1<1$，

∴ $0<y<2$，

取 x 为自变量，则有

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$(0<x<2)$.

(3) ∵ $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，

$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-x)^n}{n!}+\cdots$$

$$=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

∴ $$\frac{e^x-e^x}{2}=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

(4) ∵ $\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x$，

又∵ $$\cos2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

∴ $$\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right]$$

$$= x^2 - \frac{8x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}\cdot x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

（5）∵ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x).$$

又∵ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right).$$

（6）∵ $(1+x)\ln(1+x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x),$

又∵ $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $[-1,1]$.

$$\therefore \quad (1+x)\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n}.$$

问：如何应用幂级数求下列各数的近似值？

（1）$\sin 10°$；　　　　（2）e；

（3）$\sqrt{e}$；　　　　（4）$\sqrt[3]{1.015}$（精确到0.001）。

答： 幂级数在近似计算中有着广泛的应用，下面应用幂级数计算上述各数的近似值。

解：(1) ∵ $10° = \frac{\pi}{180} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} \approx 0.174533$,

又 ∵ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$,

∴ $\sin 10° \approx \sin 0.174533$

$$\approx 0.174533 - \frac{(0.174533)^3}{3!}$$

$$\approx 0.173647.$$

(2) ∵ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$,

∴ 令$x = 1$，有

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$\approx 2 + 0.5 + 0.16667 + 0.04167$$

$$\approx 2.71.$$

(3) ∵ $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!}$$

$$\approx 1 + 0.5 + 0.125 + 0.02083 + 0.0026$$

$$\approx 1.629683.$$

(4) ∵ $\sqrt{1.015} = \sqrt[3]{1 + \frac{15}{1000}}$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!} \cdot \frac{15}{1000} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}\left(\frac{15}{1000}\right)^2 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{5}{1000} - \frac{2}{2!}\left(\frac{5}{1000}\right)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3!}\left(\frac{5}{1000}\right)^3$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3n-4)}{n!}$$

$$\left(\frac{5}{1000}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{200}-\frac{1}{(200)^2}+\frac{2.5}{3!}\frac{1}{(200)^3}+\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{n}+\cdots\cdots$$

∴ 当$n\geqslant 1$时，

$$|R_n|\leqslant\frac{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-4)}{n!}\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

令$n=1$，有

$$\frac{0.5\times 10^{-3}}{1}=0.25\times 10^{-3}>0.5\times 10^{-4}$$

则计算可达精确度

$$\sqrt[3]{1.015}\approx 1+\frac{1}{200},$$

$$=1.0000+0.0050$$

$$=1.0050$$

七、富里哀级数

问：什么是周期函数？周期函数有什么性质？

答：在日常生活和工作中，我们经常遇到一些周而复始、循环往复的运动，这些运动虽然形式不同，但都有一个共同的特点，就是在一段时间之后重复出现前面的运动状态，而且随着时间的延长，这种运动状态总是依一定的规律重复出现。

例如，时钟钟摆的运动，活塞的往返运动，交流电，无线电波的传播，…。

我们称这种运动为周期运动，周期函数则是反映周期运动的函数。

对于函数$f(x)$，$x\in(-\infty, +\infty)$，若存在正数T，使得

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期。

例如，$f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=A\sin(\omega t+\phi)$, …都是周期函数，它们的周期为 $T=2\pi$ 和 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

周期函数具有下面的一些性质：

1．周期为 T 的函数的和、差、积、商仍为具有同一周期的周期函数。

2．如果 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $2T, 3T, \cdots nT$ 也都是 $f(x)$ 的周期。

3．如果 T 为函数 $f(x)$ 的周期，则 $-T$, $-2T$, …, $-nT$ 也都是 $f(x)$ 的周期。

4．周期函数 $f(x)$ 的积分如果存在，则周期函数的定积分只要积分区间的长度恰好是一个周期 T，则不论积分区间位于何处，积分的值总是相等的，即

$$\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx.$$

问：什么是富里哀级数？研究富里哀级数的意义是什么？

答： 形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的级数称为三角级数，其中 a_0、a_n、$b_n(n=1,2\cdots)$ 都是常数。

一个周期函数 $f(x)$，如果能展开成三角级数，则这个级数就称为函数 $f(x)$ 的富里哀级数，简称富氏级数。其中 a_0、a_n、$b_n(n=1,2,\cdots)$ 称为函数 $f(x)$ 的富氏级数系数。

例如，周期为 2π 的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

的富氏级数为：

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x,\quad(-\infty<x<+\infty;\ x\neq 0,$$

$\pm\pi,\ \pm 2\pi,\cdots$)。

研究富氏级数及如何将一个周期函数 $f(x)$ 展开为富氏级数是非常重要的。我们知道，在周期运动中简谐振动是比较简单，易于研究的，它直接反应为正弦型周期函数。但在实际问题中，除了正弦型周期函数以外，还会遇到非正弦型周期函数。

例如，电子技术中常见的矩形波、锯齿形波(图 5－2)，….

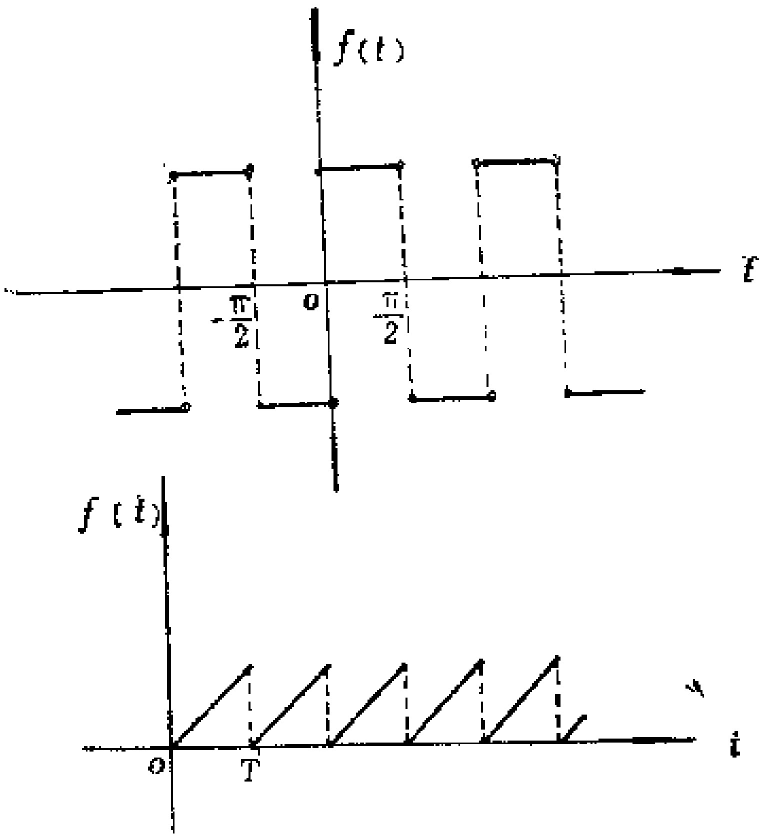


图 5—2

类似于前面学习的用函数的幂级数展开式表示与讨论函数，我们也想将一般的周期函数展开成由简单的正弦型周期函数组成的富氏级数。也就是说，将一个比较复杂的非正弦型的周期运动视为许多不同频率的简谐运动的叠加，这对于研究一般的

周期函数具有极其重要的意义。

我们研究的重点在于：如何将一个周期函数展开成富氏级数，在什么条件展开成的富氏级数收敛于该周期函数。

问：什么是三角函数系的正交性？

答：我们将函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

称为三角函数系。

所谓正交，是指定义在$[a, b]$上的两个函数$\varphi(x)$与$\psi(x)$，满足：

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

三角函数系的正交性，为三角函数系中任何两个不同的函数在区间$[-\pi, \pi]$上积分为零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0.$$

其中m、n为正整数。

问：如何将函数$f(x)$展开成富氏级数？

答：我们看到，如果函数$f(x)$能展开为富氏级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其关键在于求出富氏级数的系数 a_0、a_n、b_n （$n=1,2,\cdots$），即如何利用$f(x)$把a_0、a_n、b_n表示出来。下面利用三角函数系的正交性导出a_0、a_n、b_n （$n=1,2,\cdots$） 的计算公式。

1．a_0的计算公式：

若$f(x)$是周期为2π的周期函数，且能展开为三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

将等式两边逐项积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right.$$

$$\left.+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right],$$

由三角函数系的正交性可知，等式右端除第一项外，其余各项均为零，所以，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}2\pi,$$

则 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

2．a_n的计算公式：

将$\cos nx$乘以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的两端，再从$-\pi$到π逐项积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx\right.$$

$$+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx\Big],$$

根据三角函数系的正交性，等式右端除去$k=n$的一项外，其余各项均为零，所以，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx$$

$$=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx$$

$$=\frac{a_n}{2}\cdot 2\pi$$

$$=a_n\pi,$$

则　$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\ (n=1,2,\cdots)$.

3．b_n的计算公式：

同理，用$\sin x$乘以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]$$

的两边，并求$-\pi$到π的逐项积分，

则　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\ (n=1,2,\cdots)$,

例如，设$f(x)$是周期为2π的函数，且

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将$f(x)$展开为富氏级数.

解：假设$f(x)$可以展开为富氏级数，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot dx\right]$$

$$=0.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx dx\right]$$

$$=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi-\cos n\pi+1]$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots;\\ 0, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}$$

∴ $f(x)$的富氏展开式为：

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty;\ x\neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\cdots).$$

问：函数$f(x)$符合什么条件才可以展开为富氏级数？

答： 我们已经初步了解将函数$f(x)$展开为富氏级数的方法，但符合什么条件的函数$f(x)$才能展开为富氏级数？换句话说，应用

前面求富氏级数系数得到的$f(x)$的富氏级数，在什么条件下才收敛于函数$f(x)$呢？这是一个很重要的问题，下面的狄利克雷（*Dirichlet*）定理回答了这个问题。

定理：设函数$f(x)$为周期2π的周期函数，如果它满足：

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

（2）在一个周期内最多只有有限个极值点，则函数$f(x)$的富氏级数收敛，并且

当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$；

当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

从定理可以看出，将函数$f(x)$展开为富氏级数的条件比展开成幂级数的条件要低得多。

这里只要求：函数$f(x)$在2π周期内有有限个存在左、右极限的第一类间断点，并且函数不能在周期内振动得太厉害。

当函数$f(x)$符合狄氏条件时，则函数$f(x)$的富氏级数在连续点处收敛于该点的函数值；在间断点处收敛于该点左极限与右极限的算术平均值。

应该注意的是，在周期端点处，例如$x=-\pi$和$x=\pi$处，对于周期为2π的函数$f(x)$，总有

$$f(-\pi+0)=f(\pi+0),$$

因此，

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

即富氏级数在端点处收敛情形与间断点处相同。

若端点处为连续点，则富氏级数收敛到该点函数值，若端点处为间断点，则收敛到左、右极限的算术平均值。

问：将函数$f(x)$展开为富氏级数的具体步骤及应注意的问题是什么？

答：将一个函数$f(x)$展开为富氏级数的步骤为：

1．验证函数$f(x)$是否满足狄氏定理条件。

2．根据计算公式求出富氏级数系数a_0、a_n、b_n（$n=1,2,\cdots$）。

3．将富氏系数代入富氏级数中得到$f(x)$的富氏展开式。

4．确定富氏展开式成立的范围。

将函数$f(x)$展开为富氏级数时，应注意：

（1）$f(x)$常常是分段函数，因此积分时要分段积分。

（2）计算富氏级数系数时，常常要用到分部积分法，计算时要注意符号。

（3）确定$f(x)$的富氏级数成立的范围，实际上就是确定函数$f(x)$的连续区间，这需要找出$f(x)$在2π周期内的间断点，然后找出函数的连续区间。

例如，以2π为周期的函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$$

符合狄氏定理条件。它在一个周期$[-\pi,\pi]$内仅有三个第一类间断点：$x=-\pi$，$x=0$和$x=\pi$（图5—3）。因此，根据狄氏定

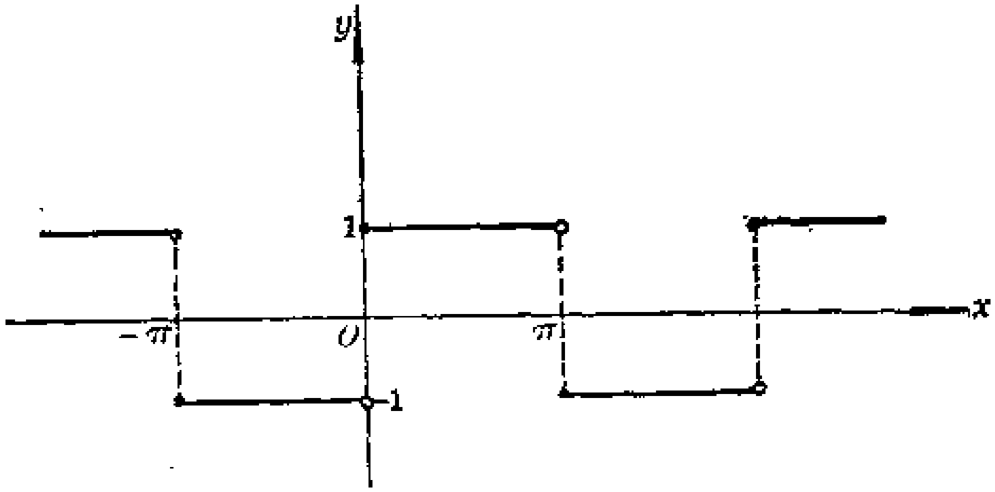


图 5—3

理和计算公式求得的富氏级数

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots\right]$$

在连续点（$x\neq k\pi$）时收敛于$f(x)$，在间断点（$x=k\pi$）收敛

于

$$\frac{-1+1}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$$

（图 5 — 4）。

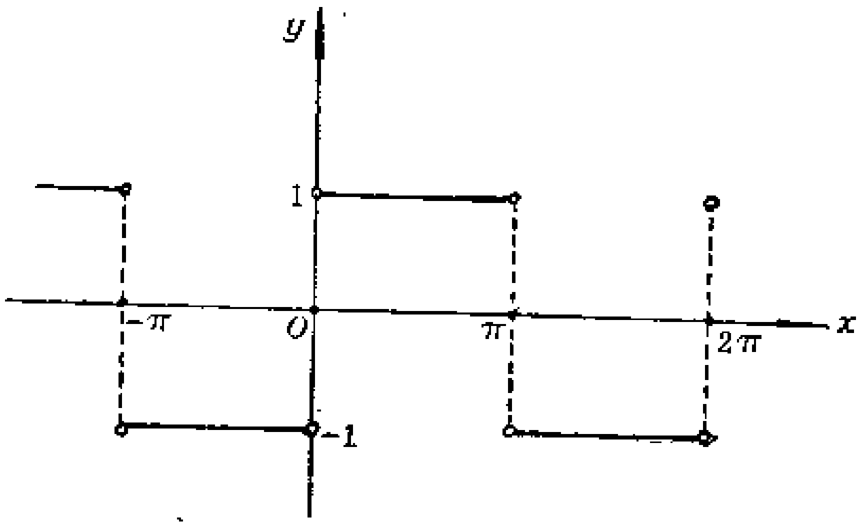


图 5—4

问：如何将周期为2π的周期函数 $f(x)=\frac{x}{2}$，在〔$-\pi$，π〕上展开为富氏级数？

答： 首先画出函数$f(x)$的图象（图5—5）。

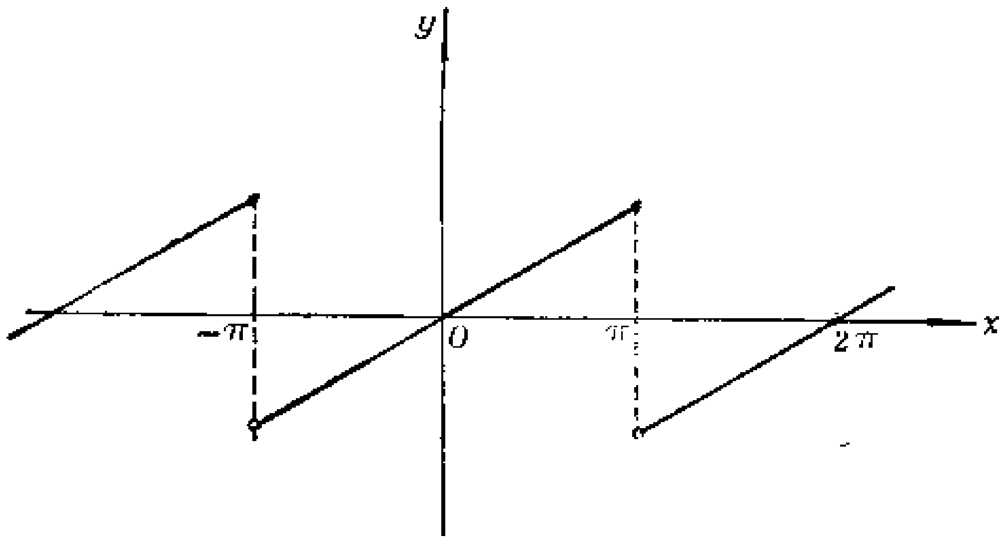


图 5—5

显然，函数 $f(x)$ 符合狄氏定理条件，下面分别计算富氏级数系数：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[0-\left(\frac{\cos nx}{n^2}\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi}{n}-\frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-2\pi\cos n\pi}{n}$$

$$=-\frac{1}{n}\cos n\pi$$

$$=-\frac{(-1)^n}{n}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n},\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

∴ 在 $(-\pi,\pi)$ 上函数$f(x)$的富氏级数为

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

在点$x=-\pi$和$x=\pi$处，富氏级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$$

（图5—6）。

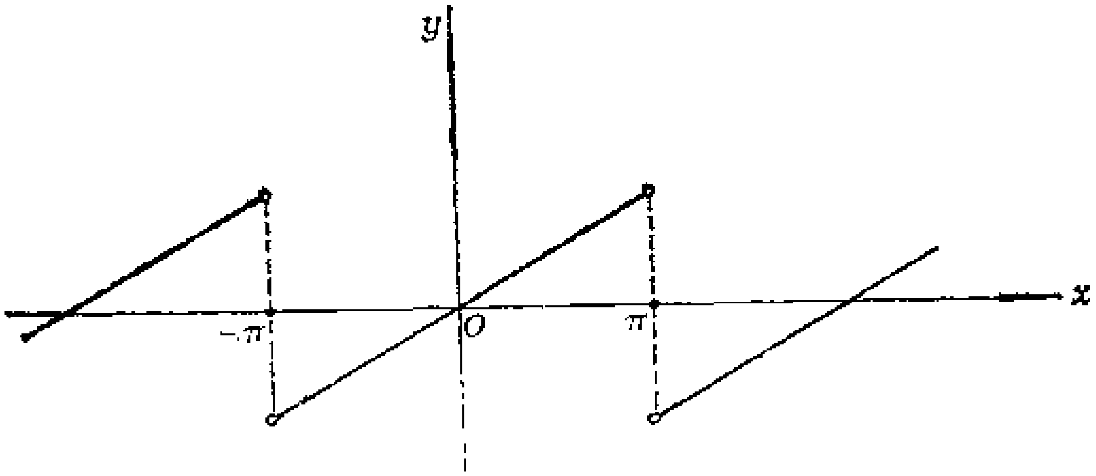


图 5—6

问：如何求2π为周期的周期函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

的富氏级数？

答：首先画出函数$f(x)$的图象（图5—7）。

显然，函数$f(x)$符合狄氏定理条件。下面计算$f(x)$的富氏级数系数：

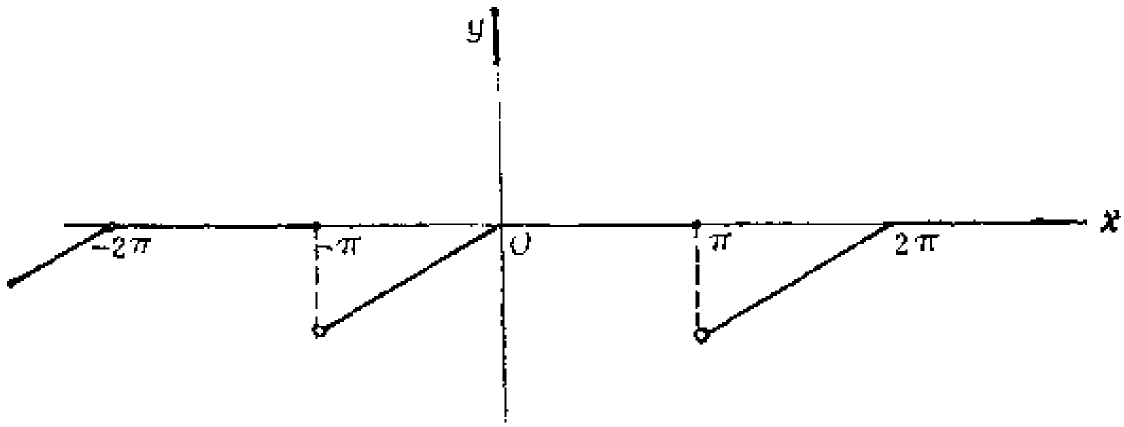


图 5—7

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_{0}^{\pi}0\cdot dx\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0\quad, & n=2,4,6,\cdots,\\ \dfrac{2}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

∴ 在 $(-\pi,\pi)$ 内函数 $f(x)$ 的富氏展开式为

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right).$$

在$x=-\pi$和$x=\pi$处，函数$f(x)$的富氏级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2}=\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

$$=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

（图5—8）。

问：如何求周期为$2l$的周期函数$f(x)$的富氏级数？

答：若函数$f(x)$是以$2l$为周期的周期函数，为了利用前面计算富氏级数系数的公式，可做下面变换：

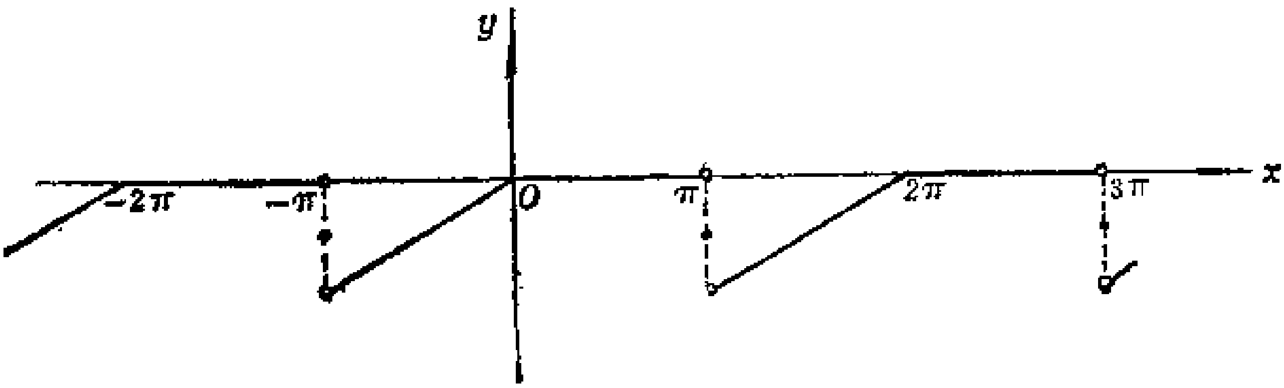


图 5—8

令　$z=\dfrac{\pi x}{l}$，则 $x=\dfrac{lz}{\pi}$，

$$\therefore\quad f(x)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right)=F(z).$$

可以证明：$F(z)$是以2π为周期的周期函数。依照前面计算富氏级数系数的公式，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)dz;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\cos nz dz\qquad(n=1,2,3\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(z)\sin nz dz\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$

倘$f(x)$符合狄氏定理条件，则$F(z)$可展开为：

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz).$$

将$z=\frac{\pi x}{l}$代入，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right);$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\ \ (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$

这就是周期为$2l$的周期函数$f(x)$的富氏级数及富氏级数系数的计算公式。只要$f(x)$符合狄氏定理条件，则可依照上述公式求出函数$f(x)$的富氏级数。

应该注意的是，以$2l$为周期的周期函数$f(x)$的富氏级数，在连续点x处收敛于$f(x)$，在间断点x处收敛于

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

例如，设$f(x)$是周期为4的函数（图5—9），它在$[-2,2]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ k, & 0\leqslant x<2\ (k\neq 0).\end{cases}$$

求$f(x)$的富氏级数。

解：显然，函数$f(x)$符合狄氏定理条件，且$l=2$.

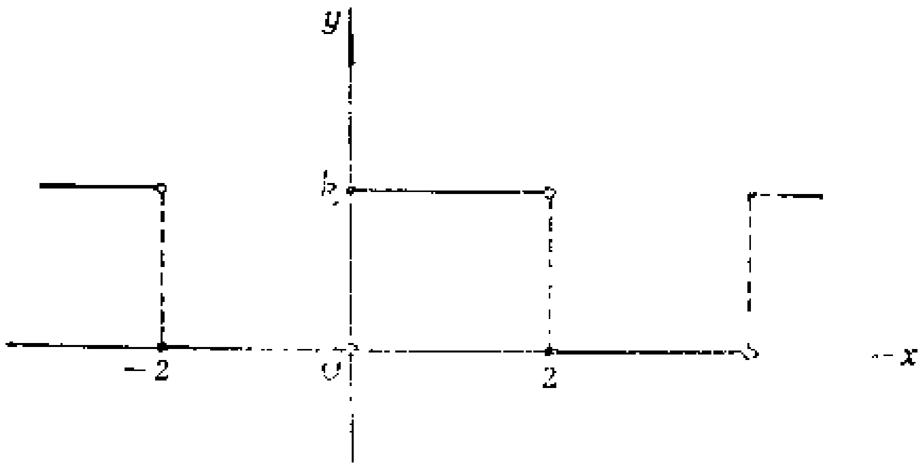


图 5—9

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0dx+\int_{0}^{2}kdx\right]=k.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}k\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$=\frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2k}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots,\\ 0, & n=2,4,6,\cdots.\end{cases}$$

∴ 在连续区间内，有

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right).$$

在各间断点处，富氏级数收敛于：

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{k}{2}$$

（图5—10）.

问：如何将函数$f(x)=-x^2+1\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$展开为富氏级数？

答：函数$f(x)$符合狄氏定理条件，且$l=\frac{1}{2}$，因此，根据富氏级

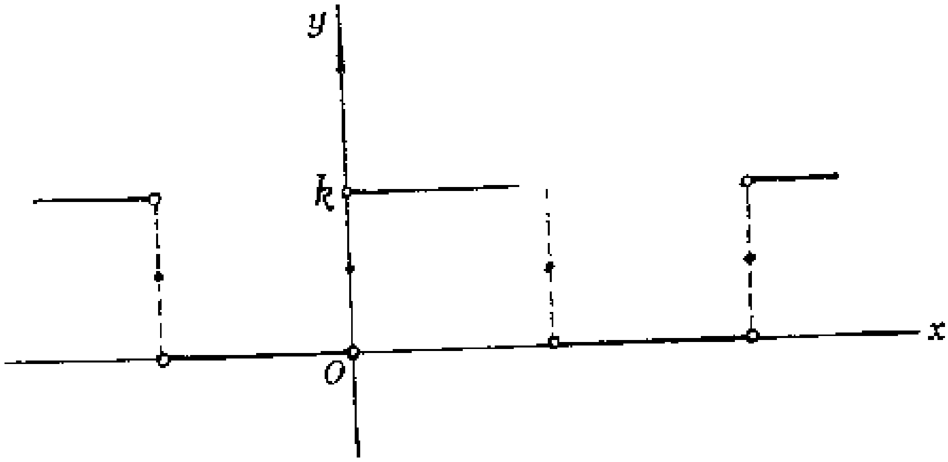


图 5—10

数系数的计算公式，有

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-x^2+1)dx=\frac{11}{6},$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-x^2+1)\cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}dx$$

$$=4\int_0^{\frac{1}{2}}(-x^2+1)\cos 2n\pi x dx$$

$$=\frac{-1}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-x^2+1)\sin\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}dx=0.$$

又 ∵ $f(x)$在$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$上连续，且$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

∴ 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$上的富氏级数为

$$f(x)=\frac{11}{12}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos 2n\pi x.$$

八、奇函数与偶函数的富氏级数

问：奇函数与偶函数及其性质是什么？

答：我们知道，若函数$f(x)$在定义域上有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数$f(x)$为奇函数；若函数$f(x)$在定义域上有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数$f(x)$为偶函数。

奇函数的图象对称于坐标原点，偶函数的图象对称于y轴。

奇函数与偶函数有下面的一些性质：

1．奇函数与奇函数乘积为偶函数；奇函数与偶函数或偶函数与奇函数乘积为奇函数；偶函数与偶函数乘积仍为偶函数。

2．若$f(x)$为奇函数，且在$[-a, a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$$

3．若$f(x)$为偶函数，且在$[-a, a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

问：奇函数与偶函数的富氏级数有什么特点？

答：1．如果 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 符合狄氏定理条件，则在$[-\pi, \pi]$上，有$f(x)\sin nx$为偶函数，$f(x)\cos nx$为奇函数。所以，

$$a_0=a_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

因此，奇函数的富氏级数完全由正弦函数组成，我们称之为正弦级数。

2．如果$f(x)$为偶函数，且 $f(x)$ 符合狄氏定理条件，则在

$[-\pi,\ \pi]$上，有$f(x)\sin nx$为奇函数，而$f(x)\cos nx$为偶函数。所以，

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\ (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=0\ (n=1,2,3,\cdots).$$

因此，偶函数的富氏级数完全由余弦函数组成，我们称之为余弦级数。

问：如何将函数$f(x)=\cos\frac{x}{2}$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为富氏级数？

答： 由于函数 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$在 $[-\pi,\ \pi]$ 上为偶函数，所以函数$f(x)$可展为余弦级数。

$$\because\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2}-n\right)x+\cos\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}-n\right)x}{\frac{1}{2}-n}+\frac{\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)x}{\frac{1}{2}+n}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]$$

又∵ $f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上连续，且$f(-\pi)=f(\pi)$，

∴ 在$[-\pi,\ \pi]$上$f(x)$的余弦级数为

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}}\right]\cos nx.$$

问：如何将函数$f(x)=x^3$ $(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为富氏级数？

答：由于函数 $f(x)=x^3$ 为奇函数，所以函数 $f(x)$ 可展为正弦级数。

∵ $a_0=a_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\sin nx dx$$

$$=(-1)^n\frac{12-2n^2\pi^2}{n^3}.$$

又∵ $f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上连续，

∴ 在$[-\pi,\ \pi]$上$f(x)$的正弦级数为

$$x^3=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{12-2n^2\pi^2}{n^3}\sin nx.$$

九、非周期函数在区间$[0,\ l]$上的富氏级数

问：如何将一个非周期函数$f(x)$在区间 $[0,\ l]$ 上展开为富氏级数？

答：前面已经看到，对定义在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的符合狄氏定理条件的周期函数 $f(x)$ 可以展开为富氏级数，且根据狄氏定理可以得到富氏级数的收敛性。但如果函数 $f(x)$ 是一个非周期函数，则不能直接将函数 $f(x)$展开为富氏级数。

为了将非周期函数$f(x)$在$[0, l]$上展开为富氏级数，需要拓广函数$f(x)$的定义域，并在拓广后的定义域定义一个符合狄氏定理条件的周期函数$g(x)$。显然，在$[0, l]$上有$f(x) \equiv g(x)$。这样，我们可以将周期函数$g(x)$展开为富氏级数，该富氏级数在$[0, l]$上收敛于$g(x) \equiv f(x)$，而在$[0, l]$以外，富氏级数与$f(x)$无关。

对非周期函数$f(x)$的这种"延拓"大体可以分为奇延拓和偶延拓两种。

所谓"奇延拓"，就是在$[-l, l]$上定义一个奇函数$g(x)$，即补充函数在$[-l, 0]$上的定义，使补充定义后得到的函数$g(x)$，在$[-l, l]$上符合

$$g(-x) = -g(x), \quad x \in [-l, l].$$

显然，在$[0, l]$上恒有：$g(x) = f(x)$（图 5—11）。

"偶延拓"就是在$[-l, l]$上定义一个偶函数$g(x)$，即补充函

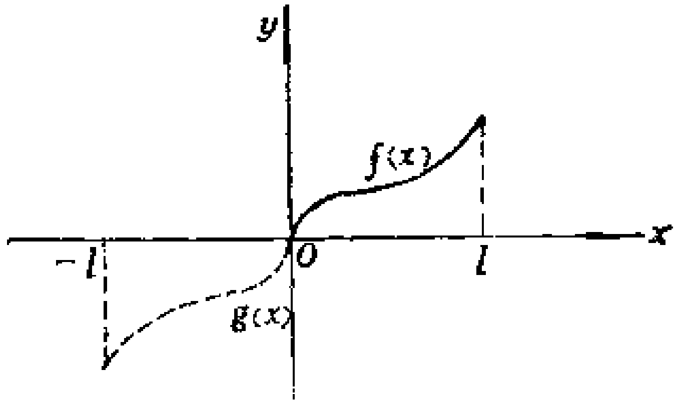


图 5—11

数在$[-l, 0]$上的定义，使补充定义后得到的函数$g(x)$，在$[-l, l]$上符合

$$g(-x) = g(x), \quad x \in [-l, l].$$

显然，在$[0, l]$上恒有：$g(x) = f(x)$（图5—12）。

经过对$f(x)$进行奇延拓或偶延拓后所得到的周期函数$g(x)$，就可以直接展开为富氏级数了，该富氏级数在$[0, l]$上收敛于$f(x)$。

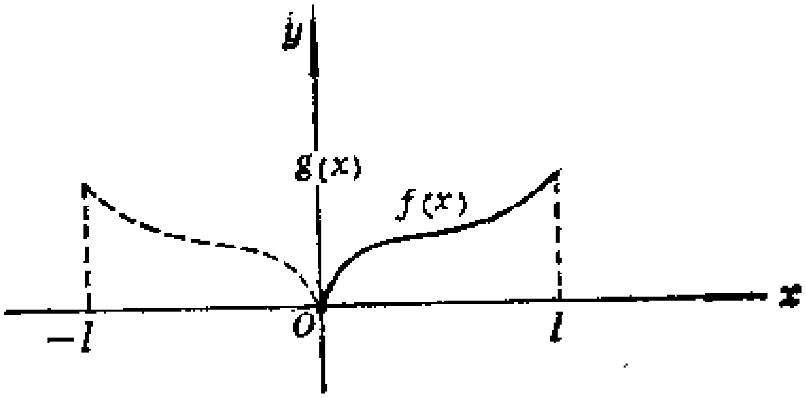


图 5—12

例如，定义在$[0, l]$上的函数 $f(x)=x$ 是个非周期函数。我们可以将其延拓为奇函数$g(x)$：

$$g(x)=x,\ x\in[-l, l].$$

亦可将其延拓为偶函数$g(x)$：

$$g(x)=|x|,\ x\in[-l, l] \quad (图5—13).$$

问：如何将函数$f(x)=x$在$[0, \pi]$上展开为富氏级数？

答：如果将$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上进行奇延拓，则所求得的富氏级数为正弦级数；若将$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上进行偶延拓，则所求得

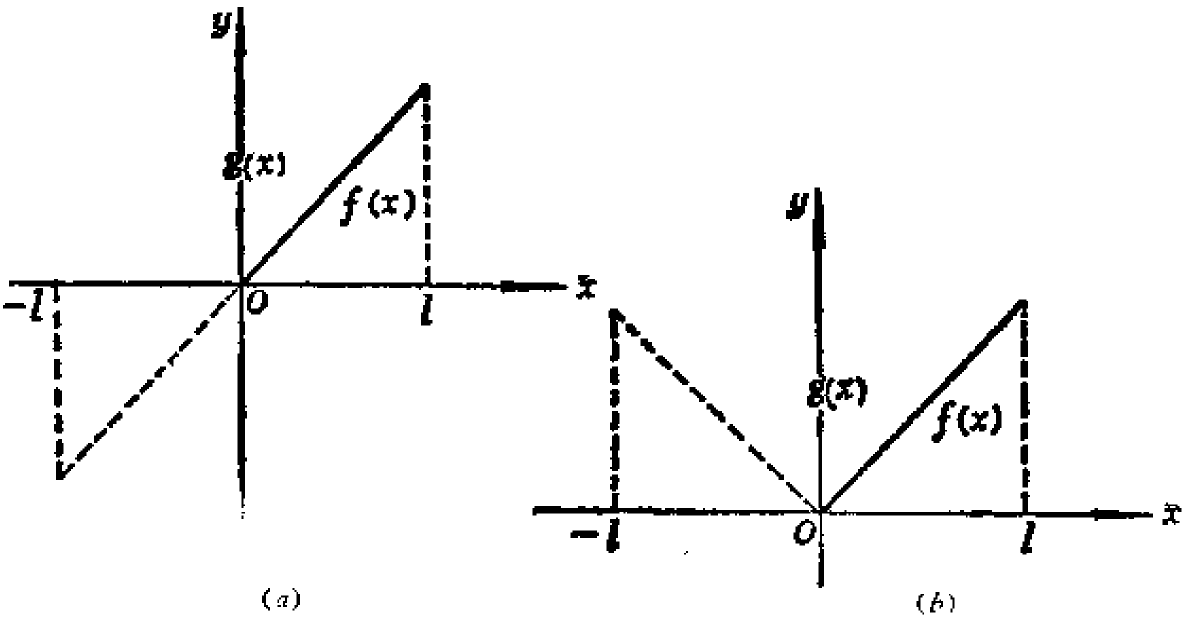


图 5—13

的富氏级数为余弦级数。

应该注意的是，虽然对$f(x)$做不同延拓得到的富氏级数不同但这只是形式上的差异，若将两个不同级数的各项的图象

迭，加之后，在[0, π]上所得到的图象完全相同。

另外，在实际展开时，一般不需要找出延拓以后的函数$g(x)$，计算时也只用[0, π]上的表达式，只是应用正弦级数或余弦级数的计算公式进行计算即可。

解： (1)在[−π, π]上将$f(x)$进行奇延拓，则在[0, π]上有

$$a_0=a_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}, \quad (n=1,2,\cdots).$$

∴ $f(x)$在[0, π]上的正弦级数为：

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right).$$

(2)在[−π, π]上将$f(x)$进行偶延拓，则在[0, π]上有

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx$$

$$=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2,4,6,\cdots;\\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots.\end{cases}$$

∴ $f(x)$在[0, π]上的余弦级数为：

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right].$$

问：如何将函数 $f(x)=\frac{x}{2}$在[0, π]上展开为正弦级数？

答： 既然要求将$f(x)$在[0, π]上展开为正弦级数，所以在对$f(x)$做奇延拓之后，有

$$a_n=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

∴ $f(x)$在$[0, \pi]$上的正弦级数为：

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin nx}{n}.$$

问：如何将函数$f(x)=e^{2x}$ ($0\leqslant x\leqslant\pi$) 展开为余弦级数？

答： 将$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上做偶延拓，有

$$b_n=0, \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2x}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[e^{2\pi}-1];$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2x}\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{2x}(2\cos nx+n\sin nx)}{2^2+n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi(4+n^2)}(2e^{2\pi}\cos n\pi-2)$$

$$=\frac{4}{\pi(4+n^2)}[(-1)^n e^{2\pi}-1].$$

∴ 在$[0, \pi]$上$f(x)$的余弦级数为：

$$e^{2x}=\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2\pi}-1}{4+n^2}\cos nx.$$

问：如何将函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<k,\\ 0, & k\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

展开为余弦级数？

答：在$[-\pi,\pi]$上对$f(x)$进行偶延拓，有

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^k 1\cdot dx+\int_k^\pi 0\,dx\right]=\frac{2k}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^k 1\cdot\cos nx dx+\int_k^\pi 0\cdot\cos nx dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^k$$

$$=\frac{2\sin nk}{n\pi}.$$

$\therefore$ $f(x)$在$[0,k]$及$[k,\pi]$上的余弦级数为：

$$f(x)=\frac{k}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin k}{n}\cos nx.$$

问：**在将非周期函数$f(x)$，$x\in(0,\pi)$做延拓时得到的周期函数$g(x)$有什么重要作用？**

答：在将非周期函数$f(x)$展开为富氏级数的计算中，延拓后得到的周期函数$g(x)$并未参与积分计算，而仍是在$[0,\pi]$上用$f(x)$计算，即

（1）作奇延拓时，将$f(x)$展开为正弦级数：

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx.$$

（2）作偶延拓时，将$f(x)$展开为余弦级数：

$$b_n=0 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx.$$

但是，我们知道，如果不对非周期函数 $f(x)$ 进行延拓，就不可能应用将周期函数展开为富氏级数的方法对 $f(x)$ 进行展开.在对$f(x)$做了延拓之后，再利用奇偶函数积分的性质，才可将对$g(x)$在$[-\pi,\pi]$上的积分转到在 $[0,\pi]$上的$f(x)$ 的积分上．从这个意义上看，将非周期函数$f(x)$进行延拓以后得到的函数$g(x)$，在整个计算中起到了重要的桥梁作用。

十、小　结

级数不仅是高等数学中重要的一部分内容，而且是研究函数和实际问题的重要工具。利用级数不仅可以将一个复杂的函数表示为级数的形式进行研究，而且还可以把一个确定的数表示为级数的形式．这充分体现了"有限"与"无限"之间的辩证关系，把数学研究推向了一个新的领域。

下面将本章的重要内容小结如下：

1．正项级数敛散性的判别法．

（1）比较判别法

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$有，$u_n\leqslant v_n$（$n=1,2,\cdots$），则当 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散．

（2）比值判别法

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数收敛；当 $l>1$（或 $l=\infty$）时，级数发散；当 $l=1$时不定．

（3）根值判别法

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$满足：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数收敛；当 $l>1$（或 $l=\infty$）时，级数发散；当 $l=1$时不定。

2．幂级数收敛域的确定

（1）幂级数的收敛半径

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho(\rho\neq0)$，则幂级数的收敛半径为$R=\frac{1}{\rho}$；当$\rho=0$时，幂级数的收敛半径$R=+\infty$；当$\rho=+\infty$时，幂级数的收敛半径$R=0$。

（2）幂级数的收敛域

当幂级数收敛半径$\rho\neq0$时，幂级数在（$-R$，R）收敛，而且应对$x=-R$与$x=R$两点幂级数的敛散性进行讨论，从而最后确定幂级数的收敛域。

当幂级数的收敛半径$\rho=0$时，幂级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$，

当幂级数的收敛半径 $\rho=\infty$时，幂级数收敛域为$x=0$。

3．将函数展开为幂级数。

（1）直接展开法

（i）台劳级数：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x\ )+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

为函数$f(x)$在点$x=x_0$处的台劳级数，

(ii) 马克劳林级数：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

为函数$f(x)$在点$x=0$处的台劳级数——马克劳林级数。

（2）间接展开法

利用下面几个常见的级数：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad (-\infty<x<+\infty);$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$(-\infty<x<+\infty)$;

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$(-\infty<x<+\infty)$;

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

$(-1<x<1)$;

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$$

$(-1<x<1)$。

通过代换、四则运算、逐项求导、积分等方法，求出一些函数的幂级数展开式。

4．富里哀级数

（1）富里哀级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$ $(n=1,2,\cdots$；其中a_n，b_n，a_0为常数)。

（2）将周期为2π的函数展开为富里哀级数，其系数为：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\ (n=1,2,3,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\ (n=1,2,\cdots).$$

（3）将周期为2l的函数展开为富里哀级数，其系数为：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx\ (n=1,2,\cdots);$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\ (n=1,2,\cdots).$$

则函数的富氏级数为：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

（4）将非周期函数$f(x)$在[0, l]上展开为富里哀级数：

在[$-l$, l]上将$f(x)$延拓为周期函数$g(x)$，当进行奇延拓时，可将$f(x)$在[0, l]上展开为正弦级数；当进行偶延拓时，可将$f(x)$在[0, l]上展开为余弦级数。

十一、思考练习题

1．判断下列各级数的敛散性：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}$；　（2）$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots$；

（3）$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\cdots$.

2．求下列幂级数的收敛域：

（1）$\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\frac{x^3}{3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\cdots$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$.

3. 将下列函数展开为 x 的幂级数：

(1) e^{2x}；　　　　(2) $\ln(2+x)$.

4. 将函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为正弦级数.

5. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ x+1, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数.

十二、思考练习题答案或提示

1. (1) 绝对收敛；　(2) 发散；　(3) 条件收敛.

2. (1) $[-3, 3]$；　(2) $[-1, 0]$.

3. (1) $1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{2^nx^n}{n!}+\cdots$,

$x\in(-\infty, +\infty)$.

(2) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5-\frac{5}{112}x^7+\cdots$, $x\in(-1, 1)$.

4. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

5. $f(x)=\left(1+\frac{3}{8}\pi\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\cos nx$.

第六章 微分方程

我们知道，函数是客观事物内部联系在数量方面的反映．所以，在研究自然科学、工程技术等各方面问题时，都要用到函数及函数关系式。但由于客观事物在数量关系上的复杂性，我们在研究过程中常常不能直接得到所需要的函数关系式，而只能得到含有这些未知函数的导数或微分的方程——微分方程．因此，对微分方程的研究就具有极为重要的意义．

本章将重点研究含有一元未知函数的微分方程——常微分方程的概念及基本解法．

学习本章的要求：

1．正确理解微分方程及其阶、解、通解、特解等概念，了解什么是初始条件、极值问题．

2．熟练掌握一阶可分离变量方程的解法．

3．熟练掌握一阶线性齐次、非齐次方程的解法，掌握一阶线性微分方程的概念．

4．掌握二阶线性常系数微分方程概念及二阶线性微分方程解的结构定理．

5．熟练掌握二阶常系数线性齐次方程的通解解法——特征根法，以及带有特殊右端的线性非齐次方程特解的解法——待定系数法。

6．了解尤拉方程（主要是二阶）的形式，会解二阶的尤拉方程．

7．了解幂级数解法的一般步骤．

8．了解二阶线性非齐次方程非齐次项是其它函数时，可用常数变易法求解．

本章重点是：可分离变量方程的解法；一阶线性齐次、非齐

次方程的解法；用特征根解二阶常系数线性齐次方程；用待定系数法解带有特殊右端的二阶常系数线性非齐次方程。

一、微分方程的概念

问：什么是微分方程与微分方程的阶？

答： 微分方程就是联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程。微分方程的最大特点是在方程中含有未知函数的导数（或微分）。如果一个方程中仅含有自变量、未知函数，而不含未知函数的导数（或微分），这类方程就不是微分方程。

应该注意的是，微分方程中的未知函数可以是一元函数，也可以是多元函数。显然，如果微分方程中的未知函数是多元函数，则方程中的导数就是偏导数。

例如，下面各方程都是微分方程：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=A\cos\omega t \quad (m,\ A,\ \omega\text{为常数}),$$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

在微分方程中，有的含有未知函数的一阶导数（或微分），有的含有二阶导数（或微分），有的甚至含有更高阶的导数。我们把微分方程中出现的未知函数的最高阶导数（或微分）的阶数，称为微分方程的阶数。

例如，$y''+y=\sin x$是二阶微分方程，

$y'''+y=\sin x$是三阶微分方程。

问：微分方程一般分为几种类型？

答： 微分方程一般可分为两大类型，即常微分方程和偏微分方程。

如果一个微分方程中的未知函数只与一个自变量有关，则称

为常微分方程；如果方程中的未知函数与几个自变量有关，并且方程中出现未知函数对几个变量的偏导数，则称该方程为偏微分方程。

例如，方程

$$y''' + y = \sin x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2x = A\cos\omega t\ (\omega,\ A,\ m\text{为常数})$$

是常微分方程；而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

是偏微分方程。

我们只研究常微分方程。

问：什么是微分方程的解、通解和特殊解？

答：如果把某个函数以及它的导数代入微分方程，能使该方程成为恒等式，那么该函数就称为这个微分方程的解。也就是说，满足微分方程的函数叫做该微分方程的解。

例如，函数 $y = x^3$ 就是微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ 的解。

应该注意的是，微分方程的解不是一个函数而是一个函数族。

例如，函数族 $y = x^3 + C$（C为任意常数）就都是方程 $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ 的解。

一般地，微分方程的解中都含有任意常数，这些常数之间没有任何联系。而且一个方程含有任意常数的个数与微分方程的阶数有关。

例如，一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$ 的解中含有一个任意常数；而二阶微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ 的解中含有两个任意常数：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2,\ \cdots.$$

如果微分方程的解含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称这样的解为微分方程的通解。

例如，$y=x^3+C$ 是方程 $\frac{dy}{dx}-3x^2=0$ 的通解；$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$ 的通解。

根据给定的已知条件，确定了通解中的任意常数之后，所得到的解称为微分方程的特解。

例如，已知质量为 m 的物体在重力作用下由初始位置 s_0 开始下落，初速度为 $v_0=0$，若不计空气的阻力，求下落路程 s 随时间 t 的变化规律。

设物体运动规律为 $s=s(t)$，则有方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

通过积分可得方程通解为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$

因为题目中所给的已知条件为：$s\Big|_{t=0}=s_0$,

$$\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0=0,$$

所以可确定出 $C_1=0$，$C_2=s_0$。

因此，符合题中已知条件的微分方程的特解为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+s_0.$$

问：什么是微分方程的初始条件？

答： 为了准确地研究客观事物在某些特定条件下的变化规律，常常需要从微分方程的通解中，求出符合上述条件的特解。这些附加条件称为方程的定解条件。在求出微分方程的通解之后，我们可根据定解条件确定通解中的任意常数，从而得到符合规定条件的特解。

在定解条件中，常见的形式是给出物体在运动的初始位置或某个瞬间所处的状态，这类定解条件称为初始条件。

例如，前面例题中所给的条件：$s\Big|_{t=0}=s_0$，$\dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v_0=0$，就是初始条件。

应该注意的是，在有些问题中初始条件常常隐含在问题中，所以，认真地分析问题，找出初始条件，并依据初始条件求出特解，是很重要的。

问：学习微分方程一般应掌握哪些问题？

答：一般地说，学习微分方程应掌握下面两个问题：

1．根据实际问题建立微分方程，并准确地确定初始条件。这需要以物理、电工、几何等、知识为基础，找出事物内在的联系，列出含有未知函数导数（或微分）的等式，其分析方法类似于列代数方程的方法。

2．解微分方程，这是我们学习的重点。目前我们仅研究一阶、二阶常微分方程。

二、可分离变量方程

问：什么是变量可分离方程？它有什么特点？

答：形如

$$\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$$

的方程称为变量可分离的方程。这种方程的特点是：经过整理，方程的右端为只含 x 的函数和含 y 的函数的乘积，方程的左端则仅为函数 y 对 x 的一阶导数。

例如，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{10-x^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},\ \cdots$$

都是可分离变量的方程.

问：如何解可分离变量的方程?

答：在可分离变量的方程

$$\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$$

中，如果$h(x)$在某个区间(a, b)内连续，$g(y)$在某个区间(c, d)内连续，且$g(y)\neq 0$，则可将方程变形为

$$\frac{dy}{g(y)}=h(x)dx.$$

这时方程左端仅含y的函数$g(y)$与dy，方程右端仅含x的函数$h(x)$与dx，我们称之为分离变量，这时，通过对方程两边分别积分，就可得出原方程的通解，我们称这种解方程的方法为分离变量法.

例1 解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解：分离变量，得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

对方程两边积分，得

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\Longrightarrow\quad \arcsin y=\arcsin x+C$$

$$\Longrightarrow\quad y=\sin(\arcsin x+C)$$

$$=\sin(\arcsin x)\cos C+\sin C\cos(\arcsin x)$$

$$=x\cos C+\sin C\sqrt{1-x^2}.$$

例2 解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{10-x^2}.$$

解：分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{10-x^2},$$

对方程两边积分，得

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{x}{10-x^2}dx$$

$$\Longrightarrow\quad \ln y=-\frac{1}{2}\ln(10-x^2)+C_1.$$

为了便于化简，令$C_1=\ln C$，则有

$$\begin{aligned}\ln y&=-\frac{1}{2}\ln(10-x^2)+\ln C\quad(C>0)\\&=\ln(10-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\ln C\\&=\ln[C(10-x^2)^{-\frac{1}{2}}]\end{aligned}$$

$\therefore\quad y=C(10-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$

问：在用分离变量法解方程时应注意什么问题？

答： 在将可分离变量方程

$$\frac{dy}{dx}=h(x)g(y)$$

变形为

$$\frac{dy}{g(y)}=dxh(x),$$

且将方程两边积分时，常会应用对数（如上例 2），这时，在通解中出现的常数C一般来说是不能为零的，这是因为$C_1=\ln C$而$C=e^{C_1}$。

但在很多方程中，求得含有常数C（$C\neq0$）的通解时，不仅当$C\neq0$时成立，且当$C=0$时，将通解代入原方程仍成立。

如上例 2，当$C=0$时，$y=0$，代入原方程成立。因此，在应用分离变量法求得含有C（$C\neq0$）的通解时，应讨论一下$C=0$的情况。如果当$C=0$时通解仍使原方程成立，则应将$C=0$写在通解后面。

例如，在上例 2 中，有通解

$$y=C(10-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(C=\ln C_1).$$

当$C=0$时，$y=0$仍为原方程的解。

问：如何应用分离变量法解下列方程？

（1）$y-xy'=a(y^2+y')$；

（2）$\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$；

（3）$xydx+(x^2+1)dy=0$；

（4）$dx+xydy+y^2dx=ydy$，求$x=2$，$y=-1$时的特解.

答：一般地，在应用分离变量法解可分离变量的方程时，需首先对方程进行必要的整理，将其整理为标准形式，然后再解。另外，有些方程常可应用一些“技巧”以简化计算。

解：（1）整理，得

$$\frac{dx}{a+x}=\frac{dy}{y(1-ay)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{a+x}=\left(\frac{1}{y}-\frac{a}{ay-1}\right)dy.$$

将方程两边积分，有

$$\ln\frac{y}{ay-1}=\ln(a+x)+\ln C,$$

$$\therefore \quad \frac{y}{ay-1}=C(a+x).$$

当$C=0$时，$y=0$仍是原方程的解。

（2）将原方程变形为：

$$10^x dx-10^{-y}dy=0.$$

根据多元函数全微分概念，有

$$\frac{10^x+10^{-y}}{\ln^{10}}=C_1,$$

$$\therefore \quad 10^x+10^{-y}=C \quad (C=C_1\ln10).$$

（3）整理，得

$$\frac{dy}{y}=\frac{-x}{x^2+1}dx.$$

将方程两边积分，有

$$\ln y = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C$$

$\Rightarrow\quad \ln y+\ln\sqrt{x^2+1}=\ln C$

$\Rightarrow\quad \ln y\sqrt{x^2+1}=\ln C,$

$\therefore\quad y\sqrt{x^2+1}=C$。

当$C=0$时，$y=0$仍是原方程的解。

（4）整理，得

$$(1+y^2)dx+(xy-y)dy=0$$

$\Rightarrow\quad \dfrac{dx}{x-1}=-\dfrac{ydy}{1+y^2},$

将方程两边积分，有

$$\ln(x-1)=-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\ln C$$

$\Rightarrow\quad \ln[(x-1)\sqrt{1+y^2}]=\ln C,$

$\therefore$ 得通解

$$(x-1)\sqrt{1+y^2}=C。$$

将$x=2$，$y=-1$代入通解中，得

$$(2-1)\sqrt{1+(-1)^2}=C$$

$\Rightarrow\quad C=\sqrt{2}$。

$\therefore$满足初始条件$x=2$，$y=-1$的特解为

$$(x-1)\sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}。$$

问：如何解下列方程？

$$\textbf{(1)}\ y'=\sin(2+x)；\quad \textbf{(2)}\ y'-\frac{1}{x}=e^x.$$

答：我们分析所给方程会发现，经过整理，原方程可变为方程右端仅是x的函数，方程左边为函数y对x的导数，即为

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)$$

的形式，此时可变形为

$$dy=\varphi(x)dx,$$

对方程两边同时积分，即可求得通解：

$$y=\int \varphi(x)dx+C。$$

解：（1）∵　$y'=\frac{dy}{dx}$，

对方程$y'=\sin(2+x)$ 两边积分，得

$$\begin{aligned}y&=\int\sin(2+x)dx+C\\&=-\cos(2+x)+C.\end{aligned}$$

（2）将原方程整理为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+e^x$$

$$\Rightarrow\qquad dy=\left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx.$$

对方程两边积分，得

$$\begin{aligned}y&=\int\left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx+C\\&=\ln x+e^x+C.\end{aligned}$$

问：质量为1克的质点受力作用作直线运动，其中力和时间成正比，且和质点运动的速度成反比，在$t=10$秒时，速度$v=50$厘米/秒，力为4达因，问从运动开始经过1分钟后的速度是多少？

答：（1）建立方程，确定初始条件。

首先根据条件和力学公式去布列含有速度v的微分方程

$$F=k\frac{t}{v}\ （k\text{为常数}）.$$

又∵　$F=ma=m\frac{dv}{dt}$，且$m=1$。

∴　可得方程

$$\frac{dv}{dt}=k\frac{t}{v}.$$

其中初始条件为：$t=10$秒，$v=50$厘米/秒，$F=4$达因。

（2）解方程

∵　$F=k\frac{t}{v}$，

又　当 $t=10$ 秒时，$v=50$ 厘米/秒，$F=4$ 达因，

则　$k=20$，

∴　原方程为：$\frac{dv}{dt}=20\frac{t}{v}$

$\Rightarrow$　$vdv=20tdt$.

对方程两边积分得通解：

$$\int vdv=\int 20tdt$$

$\Rightarrow$　$v^2=20t^2+C$.

（3）求特解

∵　当 $t=10$ 时，$v=50$，

则　$C=500$，

∴符合条件的特解为：

$v^2=20t^2+500$，

∴　$v=\sqrt{20t^2+500}$.

故当 $t=60$ 秒时，

$$v=\sqrt{20\times60^2+500}\approx269.3\text{cm/秒}.$$

问：如图6—1所示的RC充电电路，若开关K合上，电容C上的电压为$u_C=0$，如何求K合上后u_C的变化规律？

答：（1）根据电工学定律建立含有u_C的微分方程，并确定初始条件。

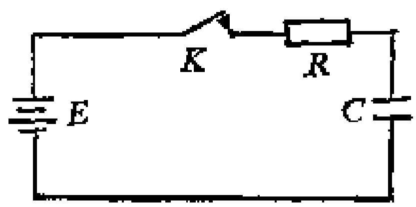


图 6—1

设电阻R上的电压为u_R，电荷量为Q，电流为i，时间为t，则根据迴路电压定律可知：

$$u_R + u_C = E.$$

$\because \quad i = \frac{dQ}{dt}, \quad$ 且$Q = Cu_C$,

$\therefore \quad u_R = Ri = R\frac{dQ}{dt} = R\frac{d(Cu_C)}{dt} = RC\frac{du_C}{dt}$.

因此得到含有u_C（自变量为时间 t ）的微分方程：

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E,$$

且初始条件为：$u_C\Big|_{t=0} = 0$.

（2）解方程

上述方程是一个可分离变量的方程，整理得：

$$RC\frac{du_C}{dt} = E - u_C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_C}{E-u_C} = \frac{dt}{RC}$$

对方程两边积分，有

$$\int\frac{du_C}{E-u_C} = \int\frac{dt}{RC}$$

$\Rightarrow \quad -\ln(E-u_C) = \frac{t}{RC} + k_1$（$k_1$为任意常数），

$$\Rightarrow \quad \ln(E-u_C) = -\left(\frac{t}{RC} + k_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad E - u_C = e^{-\left(\frac{t}{RC}+k_1\right)}$$

$$= e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{-k_1}$$

$$= ke^{-\frac{t}{RC}} \quad (k = e^{-k_1}),$$

$\therefore$得通解为： $u_C = E - ke^{-\frac{t}{RC}}$.

（3）求特解：

∵ 当 $t=0$ 时，$u_C=0$，

∴ $0=E-ke^0=E-k$

⇒ $E=k$，

∴得到符合条件的特解为：

$$u_C=E-Ee^{-\frac{t}{RC}}$$
$$=E(1-e^{-\frac{t}{RC}}).$$

问：如图6—2所示，一曲线过点（2,3），且曲线在两坐标轴间任意切线线段均被切点所平分，如何求曲线的方程？

答：（1）首先根据条件和几何定理去建立含有曲线未知解析式的微分方程，且确定初始条件。

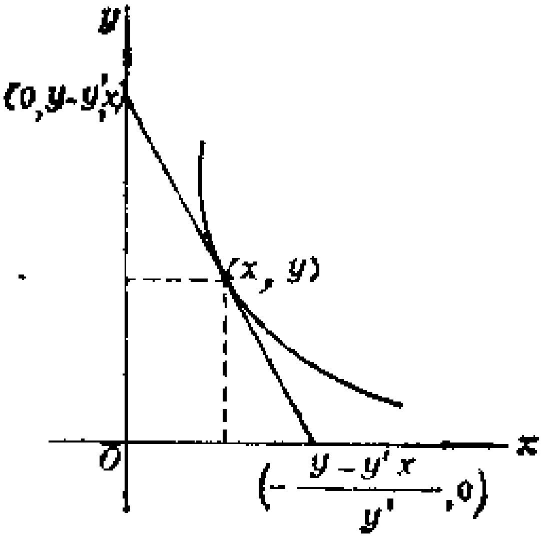


图 6—2

设曲线方程为 $y=f(x)$，初始条件为：$f(2)=3$。

∵ 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 (x,y) 处的切线斜率为 $k=y'$，

∴ 切线方程为：

$\bar{y}-y=y'(\bar{x}-x)$

⇒ $\bar{y}-y'\bar{x}=y-y'x$

⇒ $$\frac{\bar{y}}{y-y'x}-\frac{y'\bar{x}}{y-y'x}=1,$$

因此，切线在 x 轴与 y 轴的截距分别为

$$-\frac{y-y'x}{y'} \quad 与 \quad y-y'x（图6—2）.$$

∵点（x，y）平分过该点的两轴间的切线段，

∴ $$x=-\frac{y-y'x}{2y'}；\qquad y=\frac{y-y'x}{2},$$

即 $2y'x=-y+y'x$， $2y=y-y'x$.

∴ $-2y'x=2y$

$\Rightarrow$ $y+xy'=0$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$.

（2）解方程：

∵ $\ln(xy)=\ln C$,

∴ $xy=C$.

（3）求特解：

∵ $f(2)=3$，

则$2\cdot3=C$ $\Rightarrow$ $C=6$，

∴ 所求特解为：$xy=6$.

三、齐次方程

问：什么是齐次方程？它有什么特点？

答：如果一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

中的函数$f(x,\ y)$ 可写成$\frac{y}{x}$的函数，即

$$f(x,\ y)=\varphi(\frac{y}{x}),$$

则称这类方程为齐次方程.

齐次方程的最大特点就是，经过必要的整理，方程可化成左端是y关于x的一阶导数，右端是一个关于$\frac{y}{x}$的函数.

例如，方程

$$(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

就是齐次方程．这是因为经过整理，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

问：如何将齐次方程化为可分离变量的方程？

答：运用变量代换就可将齐次方程化为可分离变量方程．在齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

中，令 $u=\frac{y}{x}$，则

$$y=ux.$$

两边对 x 求导数，有

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

则原方程变成未知函数为 u 而自变量为 x 的微分方程：

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$$

$$\Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

这是可分离变量方程，对方程两端积分得出关于 u 的通解：

$$\int\frac{1}{\varphi(u)\cdot u}\,du=\int\frac{1}{x}dx.$$

最后将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，就可得到原方程的通解．

问：如何解下列各齐次方程？

（1）$y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$；　（2）$xy'-x\sin\frac{y}{x}-y=0$；

(3) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$；(4) $x\frac{dy}{dx}-y=2\sqrt{xy}$.

答：我们可按下面步骤解齐次方程：

1．将方程整理成标准形式：$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

2．令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=ux$.

3．将 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 及 $u=\frac{y}{x}$ 代入原方程，并将原方程整理成可分离变量的方程。

4．解方程，并将 $u=\frac{y}{x}$ 代回。

解：(1) ∵ 方程本身就是标准形式，

∴ 令 $u=\frac{y}{x}$，且有 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

则原方程变为：

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\operatorname{tg}u$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x}=\frac{du}{\operatorname{tg}u}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{x}=\operatorname{ctg}u\,du=\frac{\cos u}{\sin u}du,$$

∴ 解得

$$\ln x=\ln\sin u+\ln C_1\ (C_1>0).$$

$$\Rightarrow\frac{x}{\sin u}=C$$

$$\Rightarrow x=C\sin\frac{y}{x}.$$

(2) 方程两边同除以 x，将原方程整理为：

$$\frac{dy}{dx}=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x},$$

令 $u=\frac{y}{x}$，且有$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

则原方程变为：

$$u+x\frac{du}{dx}=\sin u+u$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x},$$

∴ 解得

$$\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}=\ln x+\ln C_1 \quad (C_1>0)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{u}{2}=Cx$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{y}{2x}=Cx.$$

当$C=0$时，$y=0$仍为原方程的解。

（3）原方程可整理为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，且有$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

则原方程变为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

即 $x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{u-1}{u}du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\quad \left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x},$$

∴ 解得

$$u-\ln u=\ln x+C_1$$

即
$$\ln(xu)=u+C_1$$

$$\Rightarrow\quad \ln y=\frac{y}{x}+C_1$$

$$\Rightarrow\quad y=e^{\frac{y}{x}+C_1}$$

$$\Rightarrow\quad y=Ce^{\frac{y}{x}}\quad (C=e^{C_1}).$$

当 $C=0$ 时，$y=0$ 仍为原方程的解。

（4）原方程可整理为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{xy}-y}{x}=2\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x},$$

令 $\frac{y}{x}=u$，且有 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

则原方程变为：

$$u+x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}-u,$$

即
$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{2(\sqrt{u}-u)}.$$

对方程两边积分，有

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{2(\sqrt{u}-u)}$$

$$\xrightarrow{\text{令}u=t^2}\quad \ln x=\int\frac{tdt}{t-t^2}$$

$$\Rightarrow\quad \ln x=-\ln(1-t)+\ln C_1\quad (C_1>0)$$

$$\Rightarrow\quad \ln x(1-t)=\ln C_1,$$

$$\therefore\quad x(1-\sqrt{u})=C,$$

即 $x-\sqrt{xy}=C$.

四、一阶线性方程

问：什么是一阶线性微分方程？它有什么特点？

答： 形如

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

的方程称为一阶线性微分方程。

这类方程有两个特点：

（1）方程中仅含y对x的一阶导数（或微分）。

（2）未知函数y和它的导数（或微分）都是一次的，即所谓是线性的。

例如，方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}},$$

$$y'-y=e^{-x},$$

$$\cos^2x\frac{dy}{dx}+y=\mathrm{tg}x\cdots$$

都是一阶线性微分方程。

而方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}y=x^2,$$

$$y'-e^xy^2=1\cdots$$

就不是一阶线性微分方程。

问：什么是一阶线性齐次微分方程？它有什么特点？

答： 一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)=0$时，称为一阶线性齐次微分方程。即称方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

为一阶线性齐次微分方程。

例如，下列方程都是一阶线性齐次微分方程：

$$y'+\frac{1}{x}y=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+e^{-x}y=0, \cdots.$$

综上所述可以看出，一阶线性齐次微分方程的最大特点是 $Q(x)=0$.

在一阶线性微分方程中，若 $Q(x)\neq 0$，则称该方程为非齐次的。明显可以看出，每一个一阶线性非齐次方程都唯一对应着一个一阶线性齐次方程。

例如，下列一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}},$$

$$y'-y=e^{-x},$$

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{tg}x.$$

所对应的一阶线性齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=0,$$

$$y'-y=0,$$

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=0.$$

应该注意的是，一阶线性非齐次方程的求解是建立在一阶线性齐次方程求解的基础上的。

问：如何解一阶线性齐次方程？

答：明显可以看出，一阶线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

是一个可分离变量方程。应用前面所讲的方法，有：

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

对方程两边积分，有

$$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C \quad (C > 0)$$

$\therefore \quad y = Ce^{-\int P(x)dx}$,

这就是一阶线性齐次方程的通解。

例如，解方程：$y' - y = 0$。

解：$\because \quad \dfrac{dy}{dx} = y$,

即 $\dfrac{dy}{y} = dx$,

对方程两边积分，有

$$\ln y = x + \ln C \quad (C > 0)$$

$\therefore \quad y = Ce^x$.

当 $C = 0$ 时，$y = 0$ 仍为原方程的解。

又如，解方程：$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = 0$。

解：$\because \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x+1}y$,

即 $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2}{x+1}dx$,

对方程两边积分，有

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \ln C \quad (C > 0),$$

$\therefore \quad y = C(x+1)^2$.

当 $C = 0$ 时，$y = 0$ 仍为原方程的解。

问：什么是"常数变易法"？

答：容易看出，一阶线性非齐次方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (Q(x) \neq 0)$$

不是可分离变量方程．因此，我们不可能用分离变量的方法解一阶线性非齐次方程。

但由于 $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{y}=\frac{Q(x)}{y}dx-P(x)dx,$$

对方程两边积分，有

$$\ln y=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx.$$

显然，上式右端第一个积分中含有未知函数y，因此，这个积分不能直接计算。但是由于y是x的函数，所以$\frac{Q(x)}{y}$也是x的函数，且其积分结果必然也是x的函数，我们虽不知道这个函数是什么，但不妨先设为$v(x)$，即

$$\ln y=v(x)-\int P(x)dx$$

$$\Rightarrow \qquad y=e^{v(x)-\int P(x)dx}$$

$$=e^{v(x)}\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

令$u(x)=e^{v(x)}$，则有

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad ①$$

这就是上述方程的解，只是$u(x)$是个未知函数。

我们知道，每一个一阶线性非齐次方程都对应一个一阶线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0,$$

而且这个齐次方程的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C为任意常数). \qquad ②$$

比较①、②两式可以看出，如果将与一阶线性非齐次方程相对应的一阶线性齐次方程通解中的任意常数C，换成一个未知的函数$u(x)$，便可以得到一阶线性非齐次方程的解。

这种把一阶线性齐次方程通解中的常数变易为待定函数$u(x)$的方法，我们称为“常数变易法”。

问：如何用“常数变易法”解一阶线性非齐次方程？

答： 应用“常数变易法”可设一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

的通解为

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad ①$$

下面只要求出未知函数$u(x)$，就可得到原方程的通解了。为了求出$u(x)$，我们对上式两边求导有：

$$\frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad ②$$

将①，②两式代入原方程中，有

$$\left[u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}\right]$$

$$+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad u'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$+P(x)u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$=Q(x)$$

$$\Rightarrow \quad u'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

对上式两边积分，有

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C.$$

由于$P(x)$、$Q(x)$是原方程中的已知函数，所以$u(x)$是肯定可以求出来的，这样就得到原方程的通解：

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+E\right]e^{-\int P(x)dx}$$

$$=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

问：一阶线性非齐次方程的通解有什么特点？

答：我们已经知道，一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

的通解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

明显可以看出，一阶线性非齐次方程的通解由两部分组成：

(1) $Ce^{-\int P(x)dx}$，这正好是与一阶线性非齐次方程相对应的一阶线性齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解。

(2) $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$，刚好是一阶线性非齐次方程的一个特解，只要令 $C=0$ 就可得到。

一阶线性非齐次方程通解的这种结构，实际上是一切线性方程所共有的。在下面学到二阶常系数非齐次方程时，其通解也具有类似的结构。

问：如何应用"常数变易法"解下列各方程？

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$；　　(2) $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$；

(3) $\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{tg}x$；

(4) $x\frac{dy}{dx}+y-e^x=0$，$y\Big|_{x=a}=b$.

答： 综上所述，我们实际上已经得到了一阶线性非齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

的通解公式：

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

所以，只要我们牢记这个公式，且将方程整理成标准形式，准确地找出 $P(x)$、$Q(x)$，则利用上述通解公式，就可直接求出通解。

但由于一阶线性非齐次方程的通解公式比较复杂，不易记忆，而且掌握"常数变易法"的思想又非常重要，所以，有时我们并

不提倡读者死记公式，而是强调掌握“常数变易法”的整个思想，这就需要大家能熟练应用“常数变易法”去解方程。

应用“常数变易法”解方程的步骤可归纳为下面六步：

1．将方程整理成标准形式：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$$

2．解出对应的一阶线性齐次方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解：

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

3．进行常数变易，设原方程通解为：

$$y=u(x)e^{-\int P(x)dx},$$

且有 $$\frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-\int P(x)dx}-\int P(x)dx\,u(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

4．将y与$\frac{dy}{dx}$代入原方程，求出$u(x)$，即

$$u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

5．求出原方程的通解：

$$\begin{aligned}y&=u(x)e^{-\int P(x)dx}\\&=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right].\end{aligned}$$

6．求特解。

下面我们分别用两种方法解上面四个方程。

解：（1）∵ 与方程

$$\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$$

相对应的一阶线性齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}+y=0,$$

即 $$\frac{dy}{dx}=-y$$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=-dx,$

$\therefore \quad \ln y=-\int dx$

$\Rightarrow \quad y=Ce^{-x}.$

令原方程通解为:

$$y=u(x)e^{-x},$$

$\because \quad \frac{dy}{dx}=u'(x)e^{-x}-u(x)e^{-x},$

代入原方程，有

$$u'(x)e^{-x}-u(x)e^{-x}+u(x)e^{-x}=e^{-x},$$

则 $u'(x)=1$,

$\therefore \quad u(x)=x+C.$

$\therefore$ 原方程通解为:

$$\begin{aligned} y&=u(x)e^{-x}\\ &=e^{-x}(x+C)\\ &=xe^{-x}+Ce^{-x}. \end{aligned}$$

(2) $\because$ 与原方程相对应的齐次方程为:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0,$$

即 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x+1}y$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=\frac{2}{x+1}dx,$

$\therefore \quad \ln y=2\ln(x+1)+\ln C$

$\Rightarrow \quad y=C(x+1)^2.$

令原方程通解为:

$$y=u(x)(x+1)^2$$

$\because \quad \frac{dy}{dx}=u'(x)(x+1)^2+2u(x)(x+1),$

代入原方程，有

$$u'(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore \quad u(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

∴ 原方程的通解为：

$$y=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{9}{4}}+C(x+1)^2.$$

（3）原方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\cos^2 x}=\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}.$$

$$\therefore \quad P(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}, \quad Q(x)=\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x},$$

代入通解公式解得通解为：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx}\left[\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}e^{\int\frac{1}{\cos^2 x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\mathrm{tg}x}\left[\int\frac{\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}\cdot e^{\mathrm{tg}x}dx+C\right]$$

$$=e^{-\mathrm{tg}x}\left[\int \mathrm{tg}x e^{\mathrm{tg}x}d(\mathrm{tg}x)+C\right]$$

$$=e^{-\mathrm{tg}x}\left[(\mathrm{tg}x-1)e^{\mathrm{tg}x}+C\right]$$

$$=(\mathrm{tg}x-1)+Ce^{-\mathrm{tg}x}.$$

（4）原方程可化为：

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x},$$

$$\therefore \quad P(x)=\frac{1}{x}, \qquad Q(x)=\frac{e^x}{x},$$

代入通解公式解得通解为：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{e^x}{x}e^{\int\frac{1}{x}\cdot dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int\frac{e^x}{x}e^{\ln x}dx+C\right]$$

$$=e^{\ln(x^{-1})}\left[\int\frac{e^x}{x}xdx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[\int e^x dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}(e^x+C)$$

$\because \quad y\Big|_{x=a}=b,$

$\therefore \quad b=\frac{1}{a}(e^a+C)$

$\Rightarrow \quad C=ab-e^a,$

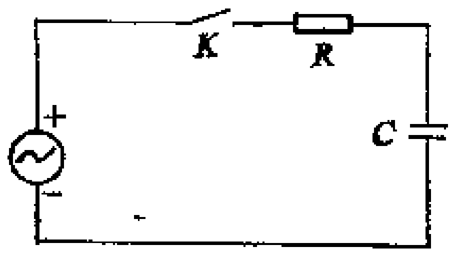


图 6—3

$\therefore$ 原方程特解为：

$$y=\frac{1}{x}(ab-e^a+e^x)$$

$$=\frac{e^x}{x}+\frac{ab-e^a}{x}$$

问：如图6—3所示，在RC串联电路上接有交流电源$C=E_m\sin\omega t$，如何求开关K闭合后，电容器上电压$u_C(t)$随时间变化的规律？其中$u_C\Big|_{t=0}=0$。

答：（1）首先列出以$u_C(t)$ 为未知函数的方程．根据克希霍夫定律可知：

$$u_R+u_C=E_m\sin\omega t.$$

$\because \quad u_R=i_R,\qquad$ 且$i=C\cdot\frac{du_C}{dt},$

$\therefore$ 可得方程

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E_m\sin\omega t$$

$$\Rightarrow\quad \frac{du_C}{dt}+\frac{1}{RC}u_C=\frac{E_m}{RC}\sin\omega t.$$

初始条件为：$u_C\Big|_{t=0}=0$。

（2）解方程：

这显然是一阶线性非齐次方程，且

$$P(t)=\frac{1}{RC},\quad Q(t)=\frac{E_m}{RC}\sin\omega t.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad u_C&=e^{-\int P(t)dt}\left[\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C_1\right]\\&=e^{-\int\frac{1}{RC}dt}\left[\int\frac{E_m}{RC}\sin\omega t\cdot e^{\int\frac{1}{RC}dt}dt+C_1\right]\\&=e^{-\frac{t}{RC}}\left[\int\frac{E_m}{RC}\sin\omega t\cdot e^{\frac{t}{RC}}dt+C_1\right]\end{aligned}$$

令 $\alpha=\frac{1}{RC}$，$\beta=\omega$，则根据积分公式：

$$\int e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t dt=\frac{e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t-\beta\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}+C_2$$

得到通解：

$$\begin{aligned}u_C&=e^{-\frac{t}{RC}}\left[\frac{E_m}{RC}RC\,e^{\frac{t}{RC}}\cdot\frac{\sin\omega t-RC\omega\cos\omega t}{1+(RC\omega)^2}+C_3\right]\\&=C_3e^{-\frac{t}{RC}}+E_m\frac{\sin\omega t-RC\omega\cos\omega t}{1+(RC\omega)^2}.\end{aligned}$$

（3）求特解：

$\because\quad u_C\Big|_{t=0}=0$，

$$\therefore\quad 0=C_3e^{-\frac{0}{RC}}+E_m\frac{\sin\omega 0-RC\omega\cos\omega 0}{1+(RC\omega)^2}$$

$$=C_3+E_m\frac{-RC\omega}{1+(RC\omega)^2}$$

则有 $C_3=\frac{E_mRC\omega}{1+(RC\omega)^2}$。

∴得到原方程的特解：

$$u_C=\frac{E_mRC\omega}{1+(RC\omega)^2}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_m}{1+(RC\omega)^2}(\sin\omega t-RC\omega\cos\omega t).$$

问：设一容器内原有100公升盐水，内含有盐10公斤。现以3公升/分的速度注人0.01公斤/公升的淡盐水，同时以2公升/分的速度抽出混合均匀的盐水，如何求容器内盐量的变化情况？

答：解决应用问题的关键在于正确分析变量之间的内在联系，布列方程。对于物理，几何等问题，我们可以根据有关的物理、几何公式列方程，但对本题则无公式可以依据。下面我们应用"微元法"布列方程。

大家在定积分应用中已经熟悉"微元法"了。利用微元法布列方程的基本步骤为：确定自变量，取微元，分析变量在微元内变化的情况，找出等量关系列方程。

1．利用"微元法"列方程：

根据本题条件可取时间t为自变量，容器内含盐量设为$Q(t)$。

下面将研究容器内含盐量$Q(t)$的变化情况，列出以$Q(t)$为未知函数的微分方程。

为此，取时间t的微元dt，在区间$[t, t+dt]$上分析容器内盐的改变量dQ。

因为容器内盐的改变量＝注入盐水中的含盐量－抽出盐水中的含盐量。

又因为在时间间隔dt内，注入水的含盐量为：$0.01\times3\times dt$。

同时，t时刻盐水的浓度为：$\frac{Q(t)}{100+(3-2)t}$，若假设在dt间隔内盐水浓度不变，则抽出盐水中含盐量应为：

$$\frac{Q(t)}{100+(3-2)t}2dt,$$

∴ 在dt间隔内有：

$$dQ=0.01\times3\times dt-\frac{Q(t)}{100+(3-2)t}2dt,$$

即得到方程

$$dQ=0.03dt-\frac{2Q(t)}{100+t}dt.$$

∵ 当 $t=0$ 时，含盐量为10公斤，

∴ 得到初始条件：$Q(0)=10$。

2．解方程：

显然，我们得到的方程是一阶线性非齐次方程：

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{2Q}{100+t}=0.03.$$

∵ 对应的齐次方程为：

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{2}{100+t}Q=0,$$

∴ $\frac{dQ}{Q}=-\frac{2}{100+t}dt$

$\Rightarrow \ln Q=-2\ln(100+t)+C$

$\Rightarrow Q=\frac{C}{(100+t)^2}$.

令原方程解为：

$$Q=\frac{u(t)}{(100+t)^2},$$

代入原方程，有

$$\frac{u'(t)}{(100+t)^2}-\frac{2u(t)}{(100+t)^3}+\frac{2}{100+t}\cdot\frac{u(t)}{(100+t)^2}=0.03$$

$\Rightarrow u'(t)=0.03(100+t)^2$

$\Rightarrow u(t)=0.01(100+t)^3+C$.

∴ 原方程解为：

$$Q(t)=0.01(100+t)+\frac{C}{(100+t)^2}.$$

3．求特解：

$\because$ $Q(0)=10$,

$\therefore$ $10=0.01\times 100+\frac{C}{100^2}$

$\Rightarrow$ $C=9\times 10^4$.

$\therefore$ 容器内盐量的变化规律为：

$$Q(t)=0.01(100+t)+\frac{9\times 10^4}{(100+t)^2}.$$

五、贝努利方程

问：什么是贝努利方程？贝努利方程与一阶线性方程有什么联系？

答：形如，

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

的方程称为贝努利方程。

显然，当$n=0$时，方程为一阶线性非齐次方程：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x);$$

当$n=1$时，方程为一阶线性齐次方程：

$$\frac{dy}{dx}+[P(x)-Q(x)]y=0.$$

当$n\neq 0$，1时方程不是线性的。

但是，贝努利方程与一阶线性方程有着密切的联系。我们可以通过变量代换，将贝努利方程转化为线性方程。

$\because$ 将贝努利方程的两端除以y^n，有

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x).$$

容易看出，上式左端第一项与$\frac{d}{dx}(y^{1-n})$只差一个常数因子$1-n$．

∴ 可令 $z=y^{1-n}$，则有

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

我们若用$1-n$乘以方程

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

的两端，有

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x).$$

这显然是关于新变量z的一阶非齐次线性方程．求出方程的通解后，将$z=y^{1-n}$代回，就可得到原贝努利方程的通解．

问：如何解下列各贝努利方程？

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2y^6$；　　**(2)** $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=xy^{\frac{1}{2}}$；

(3) $y'-3xy-xy^2=0$；　　**(4)** $xy'+y-y^2\ln x=0$．

答：我们可以应用变量代换方法将贝努利方程转化为一阶线性方程，然后求解．

应该注意的是，若所给方程不是贝努利方程的标准形，则应先将方程整理为标准形：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n.$$

解：(1) ∵ $n=6$，则

设 $z=y^{-5}$，

∵ $\frac{dz}{dx}=-5y^{-6}\cdot\frac{dy}{dx}$，

∴ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{5}y^6\frac{dz}{dx}$．

则方程为：

$$-\frac{1}{5}y^6\frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}y=x^2y^6$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{5}\ \frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}y^{-5}=x^2$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{1}{5}\ \frac{dz}{dx}+\frac{1}{x}z=x^2$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}-\frac{5}{x}z=-5x^2.$$

利用求解公式，有

$$z=e^{\int\frac{5}{x}dx}\left[C+\int-5x^2\cdot e^{-\int\frac{5}{x}dx}dx\right]$$

$$=e^{5\ln x}[C-5\int x^2\cdot e^{-5\ln x}dx]$$

$$=x^5[C-5\int x^2\cdot x^{-5}dx]$$

$$=x^5[C-5\int x^{-3}dx]$$

$$=x^5\left[C+\frac{5}{2x^2}\right]$$

$$=Cx^5+\frac{5}{2}x^3.$$

将$z=y^{1-n}=y^{-5}$代回，得原方程通解：

$$y^{-5}=Cx^5+\frac{5}{2}x^3.$$

（2）将原方程两端除以$y^{\frac{1}{2}}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{x\sqrt{y}}{1-x^2}=x.$$

令$z=\sqrt{y}$，原方程变为：

$$\frac{dz}{dx}+\frac{xz}{2(1-x^2)}=\frac{x}{2}.$$

利用求解公式，有

$$z=e^{-\int\frac{xdx}{2(1-x^2)}}\left[C+\int\frac{x}{2}e^{\int\frac{xdx}{2(1-x^2)}}dx\right]$$

$$= e^{\frac{1}{4}\ln(1-x^2)}\left[C + \int \frac{x}{2} e^{-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)} dx\right]$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left[C + \int \frac{x}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}} dx\right]$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left[C - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\right]$$

$$= C(1-x^2)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}(1-x^2),$$

将 $z=\sqrt{y}$ 代回，得原方程通解：

$$y^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2) + C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}.$$

（3）将原方程整理为标准形式：

$$\frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2$$

令 $z=y^{-1}$，则原方程变为：

$$\frac{dz}{dx} + 3xz = -x.$$

$$\because \quad z = e^{-\int 3x dx}\left[C + \int -xe^{\int 3x dx} dx\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[C - \int x \cdot e^{\frac{3}{2}x^2} dx\right]$$

$$= e^{-\frac{3}{2}x^2}\left[C - \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

将 $z=y^{-1}$ 代回，得原方程通解：

$$y^{-1} = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

（4）将原方程整理为标准形式：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^2 \cdot \frac{\ln x}{x}.$$

令 $z=\frac{1}{y}$，则方程变为：

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\frac{\ln x}{x}$$

$$\because\quad z=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[C-\int\frac{\ln x}{x}\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right]$$

$$=e^{\ln x}\left[C-\int\frac{\ln x}{x}e^{-\ln x}dx\right]$$

$$=x\left[C-\int\frac{\ln x}{x^2}dx\right]$$

$$=x\left[C+\frac{1}{x}(\ln x+1)\right]$$

$$=Cx+\ln x+1.$$

∴可得原方程通解：

$$y^{-1}=Cx+\ln x+1.$$

六、全微分方程

问：什么是全微分方程？

答：有时我们会遇到形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

的一阶微分方程。为了方便，常将这类方程写成

$$f(x,\ y)dx-dy=0$$

的形式。这种方程的一般形式为：

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0.$$

如果方程的左端是某一个二元函数 $u(x,\ y)$ 的全微分，即

$$du(x,\ y)=P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy,$$

则称该方程为全微分方程。

此时，原方程为：

$$du(x, y)=0,$$

根据全微分的意义，可得

$$u(x, y)=C \quad (C\text{为任意常数}),$$

这就是原方程的通解。

例如，方程

$$xdx+ydy=0$$

就是一个全微分方程．这是因为方程左端是函数 $u(x, y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$的全微分。

这样，这个方程的通解为

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=C_1$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2=C \quad (C=2C_1)$$

问：如何判断某个方程是否为全微分方程呢？

答： 首先我们应将方程整理为标准形式

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0,$$

然后，检验一下$P(x, y)$与$Q(x, y)$在某个矩形区域G内是否连续可微．最后，验证是否有下述等式成立：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

如果等式成立，原方程为全微分方程，否则就不是全微分方程。

例如，判断方程

$$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$$

是否为全微分方程？

解： 将原方程整理为

$$(-y\sin x+\sin y)dx+(x\cos y+\cos x)dy=0,$$

$\because \quad P(x, y)=-y\sin x+\sin y,$

$\quad\ \ Q(x, y)=x\cos y+\cos x,$

且$P(x, y)$与$Q(x, y)$在整个平面连续可微，

又∵ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\sin x+\cos y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

∴ 原方程为全微分方程。

问：如何求全微分方程的通解？

答：当一个方程是全微分方程时，我们可利用下述公式求方程通解：

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}P(x,\ y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\ y)dy=C,$$

或 $$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}P(x,\ y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,\ y)dy=C.$$

其中x_0, y_0是某个矩形区域G内选定的点$M(x_0,\ y_0)$的坐标。

应该注意的是，点$M(x_0,\ y_0)$应选在$P(x,\ y)$、$Q(x,\ y)$的连续可微的区域G内，至于选择哪个点为$M(x_0,\ y_0)$，主要看计算方便。

例如，方程

$$(x\cos y+\cos x)y'-y\sin x+\sin y=0$$

是全微分方程，且

$$P(x,\ y)=-y\sin x+\sin y$$
$$Q(x,\ y)=x\cos y+\cos x$$

在整个平面内连续可微，我们可以利用上述公式求通解。为了计算方便，可选择坐标原点为$M(x_0,\ y_0)$，即$x_0=0$，$y_0=0$. 则

$$u(x,\ y)=\int_{(0,\ 0)}^{(x,y)}(-y\sin x+\sin y)dx+(x\cos y+\cos x)dy$$
$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y(x\cos y+\cos x)dy$$
$$=x\sin y+y\cos x.$$

∴ 原方程的通解为：

$$x\sin y+y\cos x=C.$$

综上所述，解全微分方程的步骤可归纳为：

1．将方程整理为全微分方程的标准形式，并确定$P(x, y)$、$Q(x, y)$连续可微的平面区域G.

2．检验

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

是否成立.

3．在G内选择一点$M(x_0, y_0)$，并根据公式

$$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$$

或 $$u(x, y)=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$$

求出$u(x, y)$，从而得到原方程的通解：

$$u(x, y)=C.$$

问：如何求下列各方程的通解？

(1) $xydx+(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y})dy=0$;

(2) $(5x^4+3xy^2-y^3)dx+(3x^2y-3xy^2+y^2)dy=0$;

(3) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.

答： 我们可依上问归纳的步骤解上述各题.

解：(1) ∵$P(x, y)=xy$, $Q(x, y)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$,

在整个平面上连续可微，选$M(x_0, y_0)=M(0,1)$.

又 $\frac{\partial P}{\partial y}=x=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\therefore\quad u(x, y)=\int_0^x xydx+\int_1^y \frac{1}{y}dy$$

$$=\frac{x^2y}{2}+\ln y,$$

∴原方程通解为：

$$\frac{x^2y}{2}+\ln y=C.$$

(2) ∵ $P(x,\ y)=5x^4+3xy^2-y^3$,

$Q(x,\ y)=3x^2y-3xy^2+y^2$,

在整个平面连续可微，选$M(x_0,\ y_0)=O(0,0)$.

又 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\therefore\quad u(x,\ y)=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)dx+\int_0^y y^2dy$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3.$$

∴ 原方程的通解为：

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

(3) ∵ $P(x,\ y)=e^y$, $Q(x,\ y)=xe^y-2y$,

在整个平面上连续可微，选$M(x_0,\ y_0)=O(0,0)$,

又 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\therefore\quad u(x,\ y)=\int_0^x e^0dx+\int_0^y(xe^y-2y)dy$$

$$=x+xe^y-x-y^2$$

$$=xe^y-y^2.$$

∴ 原方程通解为：

$$xe^y-y^2=C.$$

七、可降阶的高阶微分方程

问：什么是可降阶的高阶微分方程？可降阶的高阶微分方程有几种不同的类型？

答：一般地说，二阶以上的高阶微分方程是极难求其通解的。但有些特殊的高阶微分方程，可以通过代换将它转化成为较低阶的方程，直至转化为一阶方程去解决，我们称这些高阶方程为

可降阶的高阶微分方程。

可降阶的高阶微分方程一般可归纳为下面三种不同类型，即

1．$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程。例如，$y'''=e^{2x}-\cos x$；

2．$y''=f(x, y')$型的微分方程。例如，$(1+x^2)y''=2xy'$；

3．$y''=f(y, y')$型的微分方程。例如，$yy''-(y')^2=0$。

问：如何解$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程？

答： 可以明显看出，这类方程具有下述特点：

（1）方程右端仅为自变量x的函数$f(x)$，

（2）方程左端为y对x的n阶导数。

这样，我们可以用逐次积分的方法降低方程阶数，直至积n次分以求出方程的通解。

例如，解方程

$$y'''=e^{2x}-\cos x.$$

解： 对原方程积一次分，得

$$y''=\frac{1}{2}e^{2x}-\sin x+C_1,$$

再连续积二次分，有

$$y'=\frac{1}{4}e^{2x}+\cos x+C_1x+C_2,$$

$$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\sin x+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3,$$

这就是原方程的通解。

问：如何解$y''=f(x, y')$型的微分方程？

答： 这类方程的特点是方程左端为y对x的二阶导数，方程的右端不含有y。

这样，我们若设$y'=p$，其中p为x的函数，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=p'$$

将p'与p代入原方程，就得到关于x和p的一阶微分方程

$$p'=f(x, p).$$

我们可以求出这个方程的通解，然后再对其积一次分，就可以

得到原方程的通解。

例如，解方程：$(1+x^2)y''=2xy'$.

解：设$y'=p$，则$y''=p'$，

原方程为：

$$(1+x^2)p'=2xp$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

两边积分，有

$$\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1 \quad (C_1>0)$$

$\therefore \quad p=C_1(1+x^2)$.

$\therefore \quad y'=C_1(1+x^2)$,

$\therefore \quad y=\int C_1(1+x^2)dx$

$$=\frac{C_1}{3}x^3+C_1x+C_2.$$

问：如何解$y''=f(y,y')$型的微分方程？

答：这类方程的特点是，方程左端为y对x的二阶导数，方程右端不含x。

若令$y'=p$，则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p,$$

将$y'=p$与$y''=p\frac{dp}{dy}$代入原方程，有

$$p\frac{dp}{dy}=f(y,p),$$

这是一个关于y为自变量、p为未知函数的一阶微分方程。我们可以解出此方程的通解，然后将$p=y'$代回积分，即可得到原方程的通解。

例如，解方程

$$yy''-(y')^2=0.$$

解：设$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，

原方程变为

$$y(p\frac{dp}{dy})-p^2=0$$

$\Rightarrow \quad p(y\frac{dp}{dy}-p)=0.$

（1）若$p\neq 0$，即$y'\neq 0$：

原方程为

$$y\frac{dp}{dy}-p=0$$

$\Rightarrow \quad \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$

$\Rightarrow \quad \ln p=\ln(C_1 y) \quad (C_1>0)$

$\Rightarrow \quad p=C_1 y$

$\Rightarrow \quad y'=C_1 y$，

即 $\quad \frac{dy}{dx}=C_1 y$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=C_1 dx$

$\Rightarrow \quad \ln y=C_1 x+C_2$

则 $\quad y=e^{C_1 x+C_2}=C_3 e^{C_1 x} \ (C_3=e^{C_2})$

$\therefore$ 原方程的通解为：

$$y=C_3 e^{C_1 x}.$$

（2）若$p=0$，即$y'=0$：

显然此时y为常量，则原方程的通解为：

$$y=C.$$

问：如何解下列各方程？

（1）$x^2y^{(4)}+1=0$；　　（2）$y''=y'+x$；

（3）$y'''=y''$.

答：解上述方程时，应首先根据方程的特点判断方程的类型，然后再根据不同类型的方程采用不同的解法。

解：（1）∵ 原方程可整理为：

$$y^{(4)}=-\frac{1}{x^2},$$

这是$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程，我们可采用逐次积分的方法解决。

对上面方程两边逐次积分，有

$$y^{(3)}=\frac{1}{x}+C_1'$$

$$\Rightarrow\quad y^{(2)}=\ln x+C_1'x+C_2'$$

$$\Rightarrow\quad y'=(x\ln x-x)+\frac{C_1'}{2}x^2+C_2'x+C_3'$$

$$\Rightarrow\quad y=(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4})-\frac{x^2}{2}+\frac{C_1'}{6}x^3+\frac{C_2'}{2}x^2+C_3'x+C_4.$$

∴ 原方程通解为：

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

（2）∵ 原方程为$y''=f(x,y')$型微分方程，

∴ 设$y'=p$，则原方程变为

$$p'=p+x,$$

即

$$p'-p=x.$$

这是关于p与x的一阶线性非齐次方程，利用公式有

$$\begin{aligned}p&=e^{\int dx}[C_1+\int xe^{-\int dx}dx]\\&=e^x[C_1+\int xe^{-x}dx]\\&=e^x[C_1-e^{-x}(x+1)]\\&=C_1e^x-(x+1).\end{aligned}$$

∵ $p=y'$,

∴
$$\begin{aligned}y&=\int p\,dx\\&=\int[C_1e^x-(x+1)]dx\\&=\int C_1e^xdx-\int(x+1)dx\end{aligned}$$

$$=C_1e^x-\frac{1}{2}x^2-x+C_2.$$

这就是原方程的通解。

（3）这是一种比较特殊的高阶微分方程，它与前面所学的三种类型不同。但我们可以明显看出方程的特点：

在方程中仅含有y'''和y''项。而$y'''=(y'')'$，这就启发我们若设$y''=p$，则可达到降阶的目的。

设$y''=p$，原方程变为：

$$p'=p.$$

即 $\dfrac{dp}{dx}=p$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dp}{p}=dx,$

两边积分，得

$$\ln p=x+\ln C_1 \quad (C_1>0),$$

$\therefore$ $p=C_1e^x.$

$\because$ $y''=p,$

$\therefore$ $y''=C_1e^x,$

将方程两边连续积分，得：

$$y'=C_1e^x+C_2,$$

$$y=C_1e^x+C_2x+C_3.$$

问：设一物体质量为m，以初速度v_0从一斜面推下，若斜面的倾角为α，摩擦系数为μ，如何求物体在斜面上移动的距离和时间的关系？

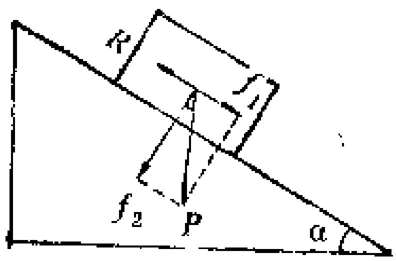


图 6—4

答：为了布列方程，首先分析物体在运动中力的关系（如图6—4）。

$\because$ 重力$P=mg$；

下滑力$f_1=mg\sin\alpha$；

重力沿斜面法向的分力$f_2=mg\cos\alpha$；

摩擦阻力$R=f_2\mu=mg\cos\alpha\cdot\mu$.

∴ 物体运动时受的合力应为：

$$F_{合}=f_1-R$$
$$=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

设物体运动距离为s，时间为t，则根据牛顿第二定律

$$F=ma,$$

得方程：

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

初始条件为：$t=0$时，$v=v_0$；$t=0$时，$s=0$。这是$y''=f(x)$型微分方程，可通过逐次积分方法得到通解，即

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{ds}{dt}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t+C_1.$$

∵ $t=0$时，$v=\dfrac{ds}{dt}=v_0$,

∴ $C_1=v_0$

则 $\dfrac{ds}{dt}=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t+v_0.$

$$\Rightarrow\quad s=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2+v_0t+C_2.$$

∵ $t=0$时，$s=0$，

∴ $C_2=0$。

∴ 物体在斜面上移动时距离与时间的关系为：

$$s=v_0t+\frac{1}{2}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)gt^2.$$

八、二阶常系数线性齐次微分方程

问：什么是二阶常系数线性齐次微分方程？

答：我们称形如

$$Ay''+By'+Cy=0 \quad (A、B、C为常数)$$

的二阶微分方程，为二阶常系数线性齐次微分方程。

所谓线性是指方程中y''、y'、y均为一次的。

例如，下列方程都是二阶常系数线性齐次微分方程：

$$y''-5y'+6y=0;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0;$$

$$4y''-8y'+5y=0;\cdots$$

而方程

$$y''-5y'+6y=3x;$$

$$xy''-6y'=e^x;\ \cdots$$

则不是二阶常系数线性齐次微分方程。

问：二阶常系数线性齐次微分方程的通解有哪些特性？在学习这些性质时应注意什么问题？

答：为了求解二阶常系数线性齐次微分方程

$$Ay''+By'+Cy=0,$$

我们应首先掌握这一类方程的通解在结构上的特点。这些特点主要体现在下面两个性质上：

性质1：如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是二阶常系数线性齐次方程的两个特解，C_1与C_2是两个任意常数，那么，$y=C_1y_1+C_2y_2$也是方程的解。

这个性质是很容易证明的。只要将$y=C_1y_1+C_2y_2$代到方程中即可。

应该注意的是，$y=C_1y_1+C_2y_2$是原方程的解，但却不一定是原方程的通解。从表面上看，$y=C_1y_1+C_2y_2$含有两个任意常数，应该是原方程的通解。但如果y_1与y_2线性相关，即$y_2=ky_1$，则

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

$$=C_1y_1+kC_2y_1$$

$$=(C_1+kC_2)y_1$$
$$=Cy_1$$

可以看出，此时，y就不是原方程的通解。

例如，$y''+y=0$是一个二阶常系数线性齐次微分方程，可以证明$y_1=\sin x$与$y_2=6\sin x$是该方程的两个解，则

$$\begin{aligned}y&=C_1y_1+C_2y_2\\&=C_1\sin x+C_2 6\sin x\\&=(C_1+6C_2)\sin x\\&=C\sin x\end{aligned}$$

是原方程的解，但不是通解。这是由于$y_2=6y_1$的原故。

性质2：如果y_1和y_2是二阶常系数线性齐次方程的两个特解，且它们线性无关（即$\frac{y_1}{y_2}\neq k$常数），则

$$y=C_1y_1+C_2y_2\ (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

是原方程的通解。

这个性质告诉我们，要求得二阶常系数线性齐次微分方程的通解，其步骤应为：

1．求出原方程的两个特解y_1，y_2；

2．判断y_1与y_2是线性无关的。即证明：

$$\frac{y_1}{y_2}\neq k\ （常数）；$$

3．原方程通解为：

$$y=C_1y_1+C_2y_2\ （C_1，C_2为任意常数）。$$

例如，二阶常系数线性齐次微分方程

$$y''+y=0$$

有下面三个特解：

$$y_1=\sin x,\quad y_2=6\sin x,\quad y_3=\cos x$$

$$\because\quad \frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{6},\quad \frac{y_1}{y_3}=\mathrm{tg}x,\quad \frac{y_2}{y_3}=6\,\mathrm{tg}x$$

∴ 原方程的通解只能由y_1、y_3或y_2、y_3组成，即

$$y=C_1y_1+C_2y_3=C_1\sin x+C_2\cos x$$

或　$y=C_1y_2+C_2y_3=6C_1\sin x+C_2\cos x$

$=C\sin x+C_2\cos x \qquad (C=6C_1)$.

问：如何求二阶常系数线性齐次微分方程的通解？

答：综上所述，可以看出，二阶常系数线性齐次方程的通解由该方程的两个线性无关的特解组成，是这两个特解的线性组合。因此，求二阶常系数线性齐次方程通解的问题，就转化为如何求出该方程的两个线性无关特解的问题。

下面我们用"特征根法"去求二阶常系数线性齐次方程的两个线性无关的特解。

我们知道，以 e 为底的指数函数的导数，仍然是以 e 为底的指数函数。因此，若设$y=e^{px}$是方程

$$Ay''+By'+Cy=0$$

的解，则只要将e^{px}代入原方程，并求出使方程成立的p来。

∵　$y'=pe^{px}$，$y''=p^2e^{px}$，

∴　代入原方程后，有

$$Ap^2e^{px}+Bpe^{px}+Ce^{px}=0$$

$$\Rightarrow \qquad e^{px}(Ap^2+Bp+C)=0.$$

∵　$e^{px}\neq 0$，

∴　必然有：

$$Ap^2+Bp+C=0$$

成立。而这是关于 p 的二次代数方程。解这个代数方程，就可以得到两个p值：p_1，p_2。从而得到原方程的两个特解：

$$y_1=e^{p_1x}\ ,\quad y_2=e^{p_2x}\ .$$

我们称方程

$$Ap^2+Bp+C=0,$$

为二阶常系数线性齐次方程

$$Ay''+By'+Cy=0$$

的特征方程。把特征方程的两个根p_1、p_2，称为原方程的两个特征根，并把利用特征方程求二阶常系数线性齐次微分方程两个特解的方法称为"特征根法"。

问：如何利用"特征根法"求二阶常系数线性齐次微分方程的两个线性无关的特解？

答：比较二阶常系数线性齐次微分方程

$$Ay''+By'+Cy=0$$

和特征方程

$$Ap^2+Bp+C=0,$$

可以看出，这两个方程的系数是相同的。因此，我们可以很容易地写出任何一个二阶常系数线性齐次微分方程的特征方程，并利用代数方法解出这个特征方程。

现在的问题是，如何根据二次代数方程两个根的不同情况（即解出两个不相等的实根；两个相等的实根；两个复根），求出原微分方程的两个线性无关的特解。

下面我们根据特征方程

$$Ap^2+Bp+C=0$$

的求根判别式：$\Delta=B^2-4AC$去分别研究。

（1）当$\Delta=B^2-4AC>0$时：

∵ $\Delta=B^2-4AC>0$,

∴ 特征方程存在两个不相等的实根：p_1，p_2。

∵ $y_1=e^{p_1x}$与$y_2=e^{p_2x}$线性无关，

∴ 原微分方程的通解为：

$$y=C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x}.$$

（2）当$\Delta=B^2-4AC<0$时：

∵ $\Delta=B^2-4AC<0$,

∴ 特征方程存在两个共轭的复根：

$$p_1=\alpha+i\beta,\quad p_2=\alpha-i\beta.$$

∴ $y_1=e^{\alpha+i\beta}$与$y_2=e^{\alpha-i\beta}$线性无关，

∴ 原方程通解为：

$$y=C_1e^{\alpha+i\beta}+C_2e^{\alpha-i\beta}$$

或利用尤拉公式写成：

$$y_1=e^{\alpha+i\beta}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$

$$y_2=e^{\alpha-i\beta}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

则通解为：

$$y=C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

为了简化通解形式并去掉复数，我们做如下变换：

$\because$ $y_1+y_2=2e^{\alpha x}\cos\beta x;$

$y_1-y_2=2ie^{\alpha x}\sin\beta x,$

$\therefore$ 令 $\bar{y}_1=\dfrac{y_1+y_2}{2};\quad \bar{y}_2=\dfrac{y_1-y_2}{2i},$

则 $\bar{y}_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \bar{y}_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$

可以验证，$\bar{y}_1$与$\bar{y}_2$也是原方程的两个特解，且两者线性无关。因此，我们可将原方程通解写成：

$$\begin{aligned}y&=C_1\bar{y}_1+C_2\bar{y}_2\\&=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,\end{aligned}$$

或 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$。

（3）当$\Delta=B^2-4AC=0$时：

$\because$ $\Delta=B^2-4AC=0$

$\therefore$ 特征方程存在两个相等的实根：$p=p_1=p_2$。这时 $y_1=e^{p_1x}$ 与$y_2=e^{p_2x}$ 线性相关。因此，不能简单地由此得出原微分方程的通解。

为了使$\dfrac{y_1}{y_2}\neq k$（常数），我们可以设原方程的两个特解为

$$y_1=e^{px}\quad 和\quad y_2=xe^{px}.$$

由于$y_1=e^{px}$ 与 $y_2=xe^{px}$是原微分方程的两个特解，且两者线性无关，因此，原微分方程的通解为：

$$y=C_1e^{px}+C_2xe^{px}$$

或 $y=e^{px}(C_1+C_2x)$

问：如何利用“特征根法”求解下列各方程？

（1）$3y''-2y'-8y=0$；（2）$y''+y=0$；

（3）$y''+6y'+13y=0$；（4）$4\dfrac{d^2x}{dt^2}-20\dfrac{dx}{dt}+25t=0$。

答：我们可以将利用“特征根法”求解二阶常系数线性齐次微分方

程的步骤归纳如下：

1．根据二阶常系数线性齐次微分方程

$$Ay''+By'+Cy=0,$$

写出它的特征方程

$$Ap^2+Bp+C=0.$$

2．解出特征根：p_1、p_2.

3．根据p_1与p_2的不同关系写出原微分方程的通解，即

（i）当p_1与p_2为两个不等实根时，通解为：

$$y=C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x}.$$

（ii）当p_1与p_2为两个相等实根时，通解为：

$$y=(C_1+C_2x)e^{px}.$$

（iii）当p_1与p_2为两个共轭复根时，通解为：

$$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

下面我们依照归纳出的步骤求解上述方程.

解：（1）∵原方程的特征方程为：

$3p^2-2p-8=0$

$\Rightarrow\quad (p-2)(3p+4)=0$

$\Rightarrow\quad p_1=2,\qquad p_2=-\dfrac{4}{3},$

∴ $y_1=e^{2x},\qquad y_2=e^{-\frac{4}{3}x}.$

∴ 原方程的通解为：

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}.$$

（2）∵ 原方程的特征方程为：

$p^2+1=0$

$\Rightarrow\quad p^2=-1$

$\Rightarrow\quad p_1=i,\ p_2=-i.$

又 $\alpha=0,\ \beta=1,$

∴ $y=C_1\sin x+C_2\cos x.$

（3）∵原方程的特征方程为：

$$p^2+6p+13=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=-3+2i$, $p_2=-3-2i$.

又 $\alpha=-3$, $\beta=2$,

∴ 原方程通解为：

$$y=e^{-3x}(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x).$$

（4）∵原方程的特征方程为：

$$4p^2-20p+25=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=p_2=\dfrac{5}{2}$.

∴ 原方程的通解为：

$$y=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}.$$

问：方程$y''+9y=0$的一条积分曲线通过点$M(\pi,-1)$，且在该点与直线$y+1=x-\pi$相切，如何求这条积分曲线的方程？

答：应首先求出由方程

$$y''+9y=0$$

所决定的积分曲线族，即求通解，然后再求符合上述条件的特解。

∵ 方程$y''+9y=0$的特征方程为：

$$p^2+9=0,$$

∴ 特征根为：$p_1=3i$, $p_2=-3i$.

∴ 原方程的通解为：

$$y=C_1\sin 3x+C_2\cos 3x.$$

∵ 所求积分曲线在点$M(\pi,-1)$与直线$y=x-\pi-1$相切。

∴ 得初始条件：当$x=\pi$时，$y=-1$,

当$x=\pi$时，$y'=1$.

将其代入通解解得：

$$C_1=-\frac{1}{3},\ C_2=1.$$

故符合上述条件的特解，即积分曲线方程为：

$$y=-\frac{1}{3}\sin 3x+\cos 3x.$$

问：已知一拉紧的弹簧所受到的拉力与它长度伸长成正比，当弹簧长度增长1厘米时，弹簧拉力增加1千克．今有2千克的物体挂在弹簧下端保持平衡．若将物体稍向下拉然后放开，此时物体产生振动．如何求物体振动的规律和周期？

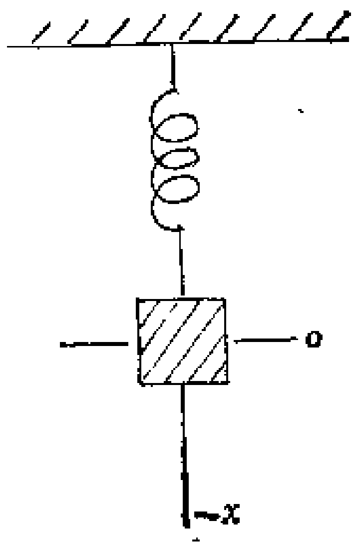


图 6—5

答：由于弹簧挂物体后处于平衡，故可设此平衡位置为原点O。

设时间为t，位移为x（正方向垂直向下）。当物体稍有位移x时，弹簧产生的恢复力F总是指向平衡位置(即与x正向相反)，且弹簧恢复力与位移成正比。因此，物体受弹簧恢复力

$$F=-xg.$$

∵ $F=ma$,

∴ 得到物体的运动方程为：

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=-xg,$$

即
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{2}x=0.$$

∵ 特征方程为：

$$p^2+\frac{g}{2}=0$$

解得特征根为：

$$p_1=\sqrt{\frac{g}{2}}\,i,\quad p_2=-\sqrt{\frac{g}{2}}\,i.$$

∴ 原方程的通解，即物体运动的规律为：

$$x=C_1\sin\sqrt{\frac{g}{2}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{g}{2}}\,t,$$

根据已知条件求得运动周期为： $2\pi\sqrt{\frac{2}{g}}$秒。

九、二阶常系数线性非齐次微分方程

问：什么是二阶常系数线性非齐次微分方程？

答： 我们称形如

$$y''+py'+qy=f(x)\quad(p、q\text{为常数，}f(x)\neq0)$$

的二阶线性方程，为二阶常系数线性非齐次微分方程，并称$f(x)$为方程的自由项。

可以明显地看出，"非齐次"主要体现在自由项$f(x)\neq0$；当$f(x)=0$时，方程为二阶常系数线性齐次微分方程。而且每个二阶常系数线性非齐次微分方程都唯一地对应着一个二阶常系数线性齐次方程。我们将会看到二阶常系数线性非齐次微分方程的最后解决，将归结到二阶常系数线性齐次微分方程上。

下面的各方程都是二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y''-y'=2x+1;$$

$$y''-2y'+y=3e^{-2x};$$

$$y''+3y'+2y=\cos2x;\ \cdots.$$

问：二阶常系数线性非齐次微分方程的通解与对应的二阶常系数线性齐次微分方程的通解有什么关系？

答： 二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的通解与对应的二阶常系数线性齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解有着密切的联系。这可从下面定理中清楚地看出来。

定理： 如果$\bar{y}$是二阶常系数线性齐次微分方程的通解，y^*是与之对应的二阶常系数线性非齐次微分方程的一个特解，则

$$y=\bar{y}+y^*$$

为二阶常系数线性非齐次微分方程的通解。

这个定理不仅表明了二阶常系数线性非齐次微分方程的通解与对应的二阶常系数线性齐次微分方程通解之间紧密的联系，而且指出了要求二阶常系数线性非齐次微分方程的通解，只要求出与之对应的二阶常系数线性齐次微分方程的通解 $\bar{y}$，并求出二阶常系数线性非齐次微分方程的某一特解y^*就可以了。

由于二阶常系数线性齐次微分方程的通解我们已经会求了，下面的主要问题就集中在如何求出二阶常系数线性非齐次微分方程的某一个特解上。

问：用什么方法求二阶常系数线性非齐次微分方程的特解？

答：很明显，求二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的一个特解的主要困难在于自由项$f(x)$上。

下面我们就常遇到的三种情况进行讨论：

1．$f(x)$为多项式：$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$；

2．$f(x)$为指数式：me^{ax}；

3．$f(x)$为三角函数式：$m\cos\beta x+n\sin\beta x$。

根据求导公式我们不难看出，如果 $f(x)$ 为多项式（或指数式、三角函数式）时，方程的特解也只能是多项式（或指数式、三角函数式），这样原方程才可能成立。

据此，我们就可以从原方程自由项$f(x)$的形式，判断出方程特解的形式，需要进一步确定的就仅是特解的系数了。求特解的方法就是“待定系数法”。

问：当二阶常系数线性非齐次微分方程的自由项 $f(x)$ 为多项式时，如何应用“待定系数法”求特解？

答：方程自由项 $f(x)$ 为多项式时，特解为与$f(x)$同次或高一次的多项式。而且一般有下面的规律：

若方程中含有y的项时，则特解是与$f(x)$同次的多项式；

若方程中不含y的项而含有y'的项时，则特解是较$f(x)$高一次的多项式。这个多项式为x和与$f(x)$同次多项式的乘积；

若方程中既不含y项，又不含y'项时，原方程可以通过直接

积分求解，不用“待定系数法”了。

例1 求方程

$$y''+y'-2y=x^2$$

的特解。

解： ∵ 方程中含有y项，且$f(x)=x^2$，

∴ 设方程特解为：

$y^*=ax^2+bx+c$（a、b、c为待定系数）。

将y^*代入原方程中，得

$$(ax^2+bx+c)''+(ax^2+bx+c)'-2(ax^2+bx+c)=x^2$$

$$\Rightarrow\quad 2a+(2ax+b)-(2ax^2+2bx+2c)=x^2$$

$$\Rightarrow\quad -2ax^2+(2a-2b)x+(2a+b-2c)=x^2.$$

比较两边对应项的系数，得

$$\begin{cases}-2a=1,\\ 2a-2b=0,\\ 2a+b-2c=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\ b=-\dfrac{1}{2},\\ c=-\dfrac{3}{4},\end{cases}$$

∴原方程的特解为：

$$y^*=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}.$$

例2 求方程

$$y''-y'=2x+1$$

的特解。

解： ∵ 方程中不含y项而含y'项，且$f(x)=2x+1$，

∴ 设原方程特解为：

$$y^*=x(ax+b)\ (a、b为待定系数).$$

将y^*代入原方程中，得

$$(ax^2+bx)''-(ax^2+bx)'=2x+1$$

$$\Rightarrow\quad 2a-(2ax+b)=2x+1$$

$$\Rightarrow\quad 2a-2ax-b=2x+1$$

$$\Rightarrow\quad -2ax+(2a-b)=2x+1$$

比较两边对应项系数，得

$$\begin{cases}-2a=2,\\ 2a-b=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-1,\\ b=-3.\end{cases}$$

∴ 原方程特解为：

$$y^*=-x^2-3x.$$

问：当二阶常系数线性非齐次微分方程的自由项 $f(x)$ 为指数形式时，如何应用"待定系数法"求特解？

答：方程自由项 $f(x)$ 为指数形式时，原方程特解也必然为指数形式，而且一般有下面的规律：

当方程

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}$$

的自由项$e^{\alpha x}$的α不是与原方程相对应的齐次微分方程特征方程的特征根时，可设特解为：

$$y^*=Ae^{\alpha x};$$

若 α 是与原方程相对应的齐次微分方程特征方程的特征根（但不是重根）时，可设特解为：

$$y^*=Axe^{\alpha x};$$

若α 是与原方程相对应的齐次微分方程特征方程的特征根而且是重根时，可设特解为：

$$y^*=Ax^2e^{\alpha x}.$$

例1 求方程

$$y'' - 3y' + y = e^{2x}$$

的一个特解。

解：∵ 方程自由项$f(x) = e^{2x}$， $\alpha = 2$。

又∵ 与原方程相对应的齐次方程的特征方程为：

$$p^2 - 3p + 1 = 0,$$

明显看出， $\alpha = 2$ 不是特征根。

则可设原方程特解为：

$$y^* = Ae^{2x}.$$

将y^*代入原方程，得

$$(Ae^{2x})'' - 3(Ae^{2x})' + Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x},$$

解得，

$$A = -1.$$

∴ 原方程特解为：

$$y^* = -e^{2x}.$$

例2 求方程

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

的一个特解。

解：∵ 方程自由项$f(x) = e^{2x}$， $\alpha = 2$。

又∵ 与原方程相对应的齐次方程的特征方程为：

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1.$$

∴ $\alpha = 2$ 恰为特征根，但不是重根。

则可设原方程特解为：

$$y^* = Axe^{2x}.$$

将y^*代入原方程，得

$$(Axe^{2x})'' - 3(Axe^{2x})' + 2(Axe^{2x}) = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad (Ae^{2x} + 2Axe^{2x})' - 3(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 2Axe^{2x} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 3Ae^{2x} - 6Axe^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x},$$

解得：

$$A=1.$$

∴ 原方程特解为：

$$y^*=xe^{2x}.$$

例3 求方程

$$y''-4y'+4y=e^{2x}$$

的一个特解。

解：∵ 方程自由项$f(x)=e^{2x}$，且$\alpha=2$。

又∵ 与原方程相对应的齐次方程的特征方程为：

$$p^2-4p+4=0$$

$$\Rightarrow \quad p_1=p_2=2.$$

∴ $\alpha=2$ 恰为特征根，且为重根。

则可设特解为：$y^*=Ax^2e^{2x}$。

将y^*代入原方程，得

$$(Ax^2e^{2x})''-4(Ax^2e^{2x})'+4(Ax^2e^{2x})=e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad (2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x})-4(2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x})+4(Ax^2e^{2x})=e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad 2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-8Axe^{2x}-8Ax^2e^{2x}+4Ax^2e^{2x}=e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{1}{2}.$$

∴ 原方程特解为：

$$y^*=\frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

问：当二阶常系数线性非齐次微分方程的自由项$f(x)$为正、余弦函数式时，如何应用“待定系数法”求特解？

答：方程自由项$f(x)$为正、余弦函数式时，特解必然也是正、余弦函数式。而且不论 $f(x)$ 是正弦函数式还是余弦函数式，原方程的特解应为：

$$y^*=m\cos\beta+n\sin\beta$$

的形式。而且一般有下面的规律：

若$i\beta$不是与原方程相对应的齐次方程特征方程的特征根时，可设特解为：

$$y^*=m\cos\beta+n\sin\beta;$$

若$i\beta$是与原方程相对应的齐次方程特征方程的特征根时，可设特解为：

$$y^*=x(m\cos\beta x+n\sin\beta x).$$

例1 求方程

$$y''+3y'+2y=\cos 2x$$

的特解。

解：∵方程自由项$f(x)=\cos 2x$，$\beta=2$。

又∵ 与原方程相对应的齐次方程的特征方程为：

$$p^2+3p+2=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=-1$，$p_2=-2$。

∴ $\beta=2$不是特征根。

则可设原方程特征根为：

$$y^*=m\cos 2x+n\sin 2x.$$

将y^*代入原方程，得

$$(m\cos 2x+n\sin 2x)''+3(m\cos 2x+n\sin 2x)'+2(m\cos 2x+n\sin 2x)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow (-4m\cos 2x-4n\sin 2x)+3(-2m\sin 2x+2n\cos 2x)+2(m\cos 2x+n\sin 2x)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow (-4m+6n+2m)\cos 2x+(-4n-6m+2n)\sin 2x=\cos 2x.$$

比较两边对应项系数，得

$$\begin{cases}-2m+6n=1,\\-6m-2n=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m = -\dfrac{1}{20}, \\ n = \dfrac{3}{20}. \end{cases}$$

∴　原方程特解为：

$$y^* = -\frac{1}{20}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x.$$

例2　求方程

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

的特解。

解：∵方程自由项 $f(x) = \sin 2x$，$\beta = 2$．

又∵　与原方程相对应的齐次方程的特征方程为：

$$p^2 + 4p = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1 = 2i,\ \ p_2 = -2i.$$

∴　$i\beta$ 为特征根。

则可设原方程特征解为：

$$y^* = x(m\cos 2x + n\sin 2x).$$

将 y^* 代入原方程，得

$$(mx\cos 2x + nx\sin 2x)'' + 4(mx\cos 2x + nx\sin 2x) = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad (-4mx\cos 2x - 4m\sin 2x - 4nx\sin 2x + 4n\cos 2x) +$$

$$4(mx\cos 2x + nx\sin 2x) = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \quad -4m\sin 2x + 4n\cos 2x = \sin 2x.$$

比较两边对应项系数，得

$$\begin{cases} -4m = 1, \\ 4n = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} m = -\dfrac{1}{4}, \\ n = 0. \end{cases}$$

∴　原方程特解为：

$$y^* = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

问：如何求方程

$$\boldsymbol{y'' + 3y' + 2y = xe^{-2x}}$$

的特解？

答：这个方程的特点是自由项$f(x)=xe^{-2x}$为x与e^{-2x}的乘积。这种方程具有一般性，我们可以视自由项$f(x)$是一个多项式与指数函数之综合。

一般地，如果自由项$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$，其中$P_n(x)$为一个n次多项式，则原方程的特解形式为：

$$y^* = x^k Q_n(x)e^{\alpha x},$$

其中，$Q(x)$为一个特定的n次多项式。

当α不是与原方程相对应的特征方程的特征根时，取$k=0$；

当α是特征根但不是重根时，取$k=1$；

当α是特征根而且是重根时，取$k=2$。

综上所述，上面方程中的自由项$f(x)$可视为一次多项式x与e^{-2x}之综合形式，且$\alpha=-2$。我们只需要检验一下α是否为特征根，即可用"待定系数法"求特解了。

解：∵与方程

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-2x}$$

相对应的特征方程为：

$$p^2 + 3p + 2 = 0$$

$$\Rightarrow\quad (p+1)(p+2) = 0,$$

$$\therefore\quad p_1 = -1,\ p_2 = -2.$$

则$\alpha=-2$恰为特征根，但不是重根。

∴　设原方程特解为：

$$y^* = x(Ax+B)e^{-2x}.$$

$$\because\quad y^{*\prime} = (2Ax+B)e^{-2x} - 2(Ax^2+Bx)e^{-2x}$$

$$= [-2Ax^2 + 2(A-B)x + B]e^{-2x},$$

$$y^{*\prime\prime}=[-4Ax+2(A-B)]e^{-2x}-2[-2Ax^2+2(A-B)x+B]e^{-2x}$$

$$=[4Ax^2-4(2A-B)x+2(A-2B)]e^{-2x}.$$

将上述各项代入原方程，得

$$[4Ax^2-4(2A-B)x+2(A-2B)]e^{-2x}+3[-2Ax^2+2(A-B)x+B]e^{-2x}+2(Ax^2+Bx)e^{-2x}=xe^{-2x}$$

$$\Rightarrow \quad -2Ax+2A-B=x.$$

比较两边对应项系数，得

$$\begin{cases}-2A=1,\\ 2A-B=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=-\dfrac{1}{2},\\ B=-1.\end{cases}$$

∴ 原方程特解为：

$$y^*=x\left(-\frac{x}{2}-1\right)e^{-2x}.$$

问：如何求方程

$$y''-y'-2y=x+\cos 2x$$

的特解？

答：这个方程的特点是自由项$f(x)=x+\cos 2x$为x与余弦函数之和。这种方程的一般形式可以写成：

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x),$$

为了求这类方程的特解，我们有下面的定理：

定理：若y_1是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)$$

的解；y_2是方程

$$y''+py'+qy=f_2(x)$$

的解；则y_1+y_2是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$$

的解。

根据这个定理，我们可以将上述方程转化为下面两个方程

$$y''-y'-2y=x$$

与 $y''-y'-2y=\cos 2x$.

然后分别求出这两个方程的特解y_1^*与y_2^*，则$y_1^*+y_2^*$即是原方程的特解。

解：∵ 与方程

$$y''-y'-2y=x+\cos 2x$$

相对应的特征方程为

$$p^2-p-2=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=2$, $p_2=-1$.

∴ 设$y_1^*=Ax+B$，并代入方程

$$y''-y'-2y=x$$

中，有

$$-A-2Ax-2B=x.$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases} A=-\dfrac{1}{2}, \\ B=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

∴ $y_1^*=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$.

又设 $y_2^*=A\sin 2x+B\cos 2x$，并代入方程

$$y''-y'-2y=\cos 2x$$

中，有

$$(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)-(2A\cos 2x-2B\sin 2x)$$
$$-2(A\sin 2x+B\cos 2x)=\cos 2x$$

$\Rightarrow$ $-4A\sin 2x-4B\cos 2x-2A\cos 2x+2B\sin 2x-2A\sin 2x$
$-2B\cos 2x=\cos 2x$.

比较两边对应项系数，有

$$\begin{cases}-3A+B=0, \\ -A-3B=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得，

$$\begin{cases}A=-\frac{1}{20}, \\ B=-\frac{3}{20}.\end{cases}$$

$\therefore \quad y_2^*=-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{3}{20}\cos 2x.$

$\therefore$ 原方程特解为：

$$y^*=y_1^*+y_2^*$$
$$=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{3}{20}\cos 2x.$$

问：如何求二阶常系数线性非齐次微分方程的通解？

答：综上所述，我们可以归纳出求二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

通解的步骤为：

1．求出与原方程对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解$\bar{y}$.

2．求出原方程的特解y^*.

3．则可得原方程通解为：$y=\bar{y}+y^*$.

例如，求方程

$$y''-y'-2y=x+\frac{1}{2}$$

的通解.

解：（1）求方程$y''-y'-2y=0$的通解$\bar{y}$：

$\because$ 特征方程为

$$p^2-p-2=0$$

$\Rightarrow \quad p_1=2, \ p_2=-1.$

$\therefore\quad \bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$.

（2）求原方程的特解y^*：

$\because$ 方程自由项 $f(x)=x+\frac{1}{2}$为一次多项式，

$\therefore$ 可设特解为$y^*=ax+b$，并将y^*代入原方程，有

$$(ax+b)''-(ax+b)'-2(ax+b)=x+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad -a-2ax-2b=x+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad -2ax+(-a-2b)=x+\frac{1}{2}.$$

比较两边对应项系数，有

$$\begin{cases}-2a=1,\\ -a-2b=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=0.\end{cases}$$

$\therefore$ 原方程特解为：

$$y^*=-\frac{1}{2}x.$$

（3）求通解：

原方程通解为：

$$y=\bar{y}+y^*$$

$$=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}x.$$

问：如何求下列各方程的通解？

（1）$y''-2y'+y=3e^x$；（2）$y''+4y=\sin 2x$.

答： 我们可以依照上面归纳的步骤去求各方程的通解。

解：（1）$\because$ 与原方程对应的齐次方程为：

$$y''-2y'+y=0,$$

又特征方程为：

$$p^2-2p+1=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=p_2=1$.

$\therefore$ 齐次方程的通解为：

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2xe^x.$$

$\because$ $f(x)=3e^x$中的$\alpha=1$恰为特征根重根，

$\therefore$ 设原方程特解为：

$$y^*=ax^2e^x,$$

代入原方程，有

$$(ax^2e^x)''-2(ax^2e^x)'+(ax^2e^x)=3e^x,$$

解得

$$a=\frac{3}{2},$$

$\therefore$ 原方程特解为：

$$y^*=\frac{3}{2}x^2e^x.$$

$\therefore$ 原方程通解为：

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{3}{2}x^2e^x.$$

（2）$\because$ 与原方程对应的齐次方程为：

$$y''+4y=0,$$

又特征方程为：

$$p^2+4=0$$

$\Rightarrow$ $p_1=2i$, $p_2=-2i$.

$\therefore$ 齐次方程通解为：

$$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

易求得原方程特解为：

$$y^*=-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

$\therefore$ 原方程通解为：

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

问：一质量为m的质点，由静止开始沉入液体。当下沉时，液体的反作用力与下沉的速度成正比，如何求质点运动的规律？

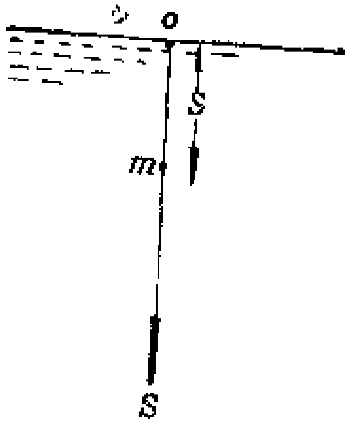


图 6—6

答：（1）首先设立方程。

以水面某点为原点，s轴垂直向下为正向。若质点在时刻t时处于水面下s处，则质点受到的反作用力应为

$f=k\dfrac{ds}{dt}$（k为比例系数），

∵ 质点受的合力为：

$$F=P-f=mg-k\frac{ds}{dt}$$

∴ 根据牛顿第二定律可建立方程：

$F=ma$

$$\Rightarrow \quad mg-k\frac{ds}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k}{m}\ \frac{ds}{dt}=g.$$

（2）确定初始条件。

当$t=0$时，$s=0$；当$t=0$时，$v=\dfrac{ds}{dt}=0$。

（3）解方程。

∵ 与原方程对应的齐次方程为：

$$s''+\frac{k}{m}s'=0.$$

其特征方程为：

$$p^2+\frac{k}{m}p=0,$$

$$\Rightarrow \quad p_1=0,\ p_2=-\frac{k}{m}.$$

∴ 齐次方程的通解为：

$$\bar{s}=C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2.$$

又∵　方程自由项$f(x)=g$,

∴　可令原方程特解为：

$$s^*=At,$$

代入原方程，有

$$0+\frac{k}{m}A=g$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{m}{k}g.$$

$$\therefore \quad s^*=\frac{m}{k}gt$$

∴　原方程通解为：

$$\begin{aligned} s &= \bar{s}+s^* \\ &= C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2+\frac{m}{k}gt. \end{aligned}$$

（4）求特解.

$$\because \quad \frac{ds}{dt}=-\frac{k}{m}C_1e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$$

由　$s|_{t=0}=0$,　$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=0$,

可得　$C_1=\frac{m^2}{k^2}g$,　$C_2=-\frac{m^2}{k^2}g$.

∴　质点的运动规律为：

$$s=\frac{m^2}{k^2}ge^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m^2}{k^2}g+\frac{m}{k}gt.$$

十、小　　结

在求解微分方程时，应首先判断方程的类型，然后再根据方程的不同类型确定不同的解法。为了便于复习，我们将所学过的几种类型方程的解法列表如下：

类型	方　　程	解　　　法
一阶微分方程	$\frac{dy}{dx}=f(x)$	直接积分法．通解：　$y=\int f(x)dx+C$．
	$\frac{dx}{dy}=\varphi(x)h(y)$	分离变量法．先分离为：$\frac{dy}{h(y)}=\varphi(x)dx$， 再积分求通解．
	$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$	常数变易法． 通解：$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$
可降阶的高阶微分方程	$y^{(n)}=f(x)$	逐次积分法求通解．
	$y''=f(x,y')$	变量代换法．可设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'(x)$， 原方程降阶为：$p'(x)=f(x,p(x))$，求出通解 后将$y'=p(x)$代回，积分可得原方程通解．
	$y''=f(y,y')$	变量代换法．可设 $y'=p(x)$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$， 原方程变为 y、p 的一阶方程：$p'=f(y,p)$． 求通解后将 $y'=p(x)$ 代回，积分可得原方程 通解．
二阶常系数线性齐次方程	$Ay''+By'+Cy=0$	特征根法．首先确定特征方程：Ap^2+Bp+C $=0$，然后求出特征根p_1与p_2，则通解为： $y=C_1e^{p_1x}+C_2e^{p_2x}$． 应注意，（1）当$p_1=p_2$时，通解为： $y=(C_1+C_2x)e^{px}$，（2）当p_1、p_2为两个共 轭复根时，通解为： $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$．
二阶常系数线性非齐次方程	$y''+py'+qy=f(x)$	（1）先用特征根法求齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个特征根，然后得其通解$\bar{y}$． （2）用待定系数法求方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解y^*． 应注意，由$f(x)$的形式确定y^*的形式，并注意 几种特殊情况y^*的设法． （3）原方程通解为： $y=\bar{y}+y^*$．

在应用微分方程解决实际问题时，应首先分析问题特点，根据几何、物理等方面的公式列方程，或用“微元法”列方程．其重点在于前者，尤其是应用牛顿第二定律列方程．列出方程后应注意确定方程的初始条件，然后解方程并求特解．

十一、思考练习题

1．求下列微分方程的通解或满足初始条件的特解：

（1） $y'=\dfrac{1+x^2}{2x^2y}$；（2）$y'=\dfrac{-y^2}{1+2x}$；

（3） $(1+y)dx+(x-1)dy=0$；（4）$y''=\dfrac{1}{1+x^2}$；

（5） $xy''+y'=0$；（6）$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$，

$y|_{x=\pi}=1$；

（7） $y'+y=e^{-x}$；（8）$y''+4y'+29=0$，$y|_{x=0}=0$，

$y'|_{x=0}=15$；

（9）$y''-6y'+9y=f(x)$，①$f(x)=2x^2-x+3$，

②$f(x)=e^{3x}$；

（10）$y''-2y'+5y=f(x)$，①$f(x)=\cos 2x$，

②$f(x)=e^x\sin 2x$；

2．有一截面为均匀的肱梁长为l，其自由端受一水平牵引力Q作用，方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=Qy-\frac{1}{2}\omega x^2.$$

其中E为该梁材料之弹性系数，I为梁截面对于中心轴的转动惯量，ω为梁的单位长度重量，试求弹性曲线．

3．一单摆长为l，质量为m，作简谐振动，若来往摆动的偏角很小，试求运动方程．

4．有一质量为m的物体，在空气中由静止开始下降，若空气阻力为$R=C^2v^2$（其中v为物体运动速度），试求物体下落距离与时间的函数关系。

十二、思考练习题答案或提示

1．（1）$y^2=x-\frac{1}{x}+C$；（2）$e^{\frac{2}{y}}=C(2x+1)$；

（3）$(1+y)(1-x)=C$；

（4）$y=x\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$；

（5）$y=C_1\ln x+C_2$；（6）$y=\frac{\pi-1-\cos x}{x}$；

（7）$y=(x+C)e^{-x}$；（8）$y=3e^{-2x}\cdot\sin5x$；

（9）①$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{21}x+\frac{11}{27}$，

②$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{x^2}{2}e^{3x}$；

（10）①$y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)+\frac{1}{17}\cos2x-\frac{4}{17}\sin2x$，

②$y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)-\frac{x}{4}e^x\cos2x$。

2．$y=C_1e^{-\sqrt{\frac{Q}{EI}}x}+C_2e^{\sqrt{\frac{Q}{Ex}}x}+\frac{\omega}{2Q}x^2+\frac{\omega EI}{Q^2}$；

3．$\theta=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$；

4．$s=\frac{m}{C^2}\ln Ch\left(C\sqrt{\frac{g}{m}}t\right)$。

第七章　综合练习

自我检查题（一）

一、填空题：

（1）设向量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，

则$\vec{a}$的单位向量$\vec{a}_0=$ ________；

（2）设函数$f(x, y)=\sin\ln(x^2-y)$，

则$f(x, y)$的定义域是________；

（3）幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^n}{5^n}$的收敛半径是____；

（4）e^x在点$x_0=0$处的局部泰勒公式（即马克劳林公式）是

________；

（5）将下面的二重积分写成累次积分：

$$\iint_D f(x, y)dxdy= ________,$$

其中D是由$y=x^2$与$y=x$围成的区域；

（6）设$z=\sqrt{x}\cdot\sin(x+y)$，则$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________ .

二、求过点M（3，0，－1），且平行于直线：

$$\begin{cases} x+2z-4=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$$

的直线标准方程。

三、设$u=\varphi(x-at)+\phi(x+at)$，其中$\varphi$、$\phi$为可微函数，证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

四、（1）计算：$\iint\limits_D y\,dx\,dy$，其中D为$y=x$，$x=0$，$y=1$围成的三角形区域。

（2）试用柱面坐标计算积分

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv,$$

其中Ω为抛物面$z=1-x^2-y^2$与平面xoy围成的区域。

五、设$f(x^2+y^2)$具有关于中间变量$u=x^2+y^2$的一阶连续导数，试用格林公式验证：沿任何光滑闭曲线l的积分

$$\oint_l f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

六、计算曲面积分

$$\iint\limits_S (x^2-yz)dy\,dz+(yz-2xy)dz\,dx-z^2dx\,dy$$

其中S为圆柱面：$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 0<z<1 \end{cases}$ 的外侧。

七、有一槽形容器，底是半圆柱形，其长为H（如图7—1），截面是半径为R的半圆，横放在水平地面上，其表面积为S_0，试用拉格朗日乘数法求出R与H的值，使得此容器的容积最大。

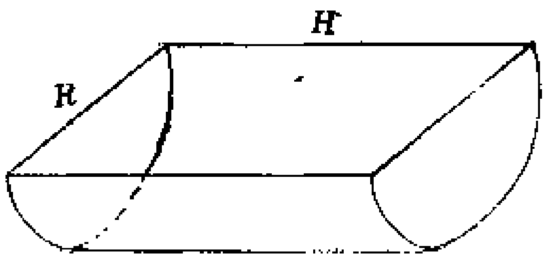


图 7—1

八、（1）将函数$\ln(a+x^2)$（$a>0$）在$x=0$展为泰勒级数，并写出收敛范围。

（2）将周期函数

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi\leq x<0 \\ 1, & 0\leq x<\pi \end{cases}$$

展开成富氏级数。

九、（1）求一阶微分方程$x^2yy'=x^3-1$满足初始条件$y|_{x=1}=0$的特解。

（2）设有二阶线性非齐次方程

$$y''-y'-2y=10\sin x \quad ①$$

求相应齐次方程的通解，并求非齐次方程①的通解。

自我检查题（一）答案

一、（1）$\dfrac{a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

（2）$y<x^2$。

（3）$5\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{5^n}}{(-1)^{n+2}\dfrac{1}{5^{n+1}}}\right|=5\right)$。

（4）$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$，$(x\to 0)$

（5）$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$或$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

（6）$\sqrt{x}\cos(x+y)$。

二、直线

$$\begin{cases} x+2z-4=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$$

的方向

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-2,-3,1),$$

过点$M(3,0,-1)$，平行于已知直线的标准方程为

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{1}.$$

三、$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(x-at)'_t+\psi'(x+at)'_t$

$=\varphi'(-a)+\psi' a$

$=a(\psi'-\varphi')$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a[\psi'' a-\varphi''(-a)]$

$=a^2(\varphi''+\psi'')$ ①

$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)'_x+\psi'(x-at)'_x$

$=\varphi'+\psi'$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''+\psi''$ ②

比较①与②式，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

四、（1）如图7—2.

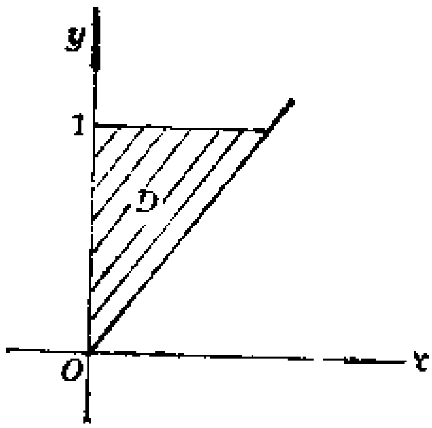


图 7—2

$\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_0^1 y\,dy\int_0^y dx$

$=\int_0^1 y\cdot x\Big|_0^y dy$

$=\int_0^1 y^2 dy$

$=\frac{y^3}{3}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{3}.$

或$\iint\limits_D y\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_x^1 y\,dy$

$$=\int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

（2）求柱面坐标

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$

$$dxdydz=rdrd\theta dz$$

确定积分限

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$
$$0\leqslant r\leqslant 1,$$
$$0\leqslant z\leqslant 1-r^2.$$

$$\therefore\quad \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dv=\iiint_\Omega r^2\cdot rdrd\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr\int_0^{1-r^2}dz$$

$$=2\pi\int_0^1 r^3\cdot z\Big|_0^{1-r^3}dr$$

$$=2\pi\int_0^1 (r^3-r^5)dr$$

$$=2\pi\left(\frac{r^2}{4}\Big|_0^1-\frac{r^6}{6}\Big|_0^1\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

五、$\oint_l f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$

$$=\oint_l xf(x^2+y^2)dx+yf(x^2+y^2)dy.$$

$$P(x,\ y)=xf(x^2+y^2),\ Q(x,\ y)=yf(x^2+y^2).$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy\cdot f'(x^2+y^2),\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2xyf'(x^2+y^2).$$

因为$f(u)$有连续的一阶导数，所以$xf(u)$，$yf(u)$都有 连续的一阶偏导数，根据格林公式，得

$$\oint_l f(x^2+y^2)(xdx+ydy)$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\ \text{（其中}D\text{是}l\text{所围成的区域）}$$

$$=\iint_D[2xyf'(x^2+y^2)-2xyf'(x^2+y^2)]dxdy$$

$$=0.$$

六、在xoy平面上补充圆面S_1：$x^2+y^2\leqslant 1$，在$z=1$的平面上补充圆面S_2：$x^2+y^2\leqslant 1$，于是S_1的下侧与S_2的上侧及原曲面构成封闭曲面$S+S_1+S_2$的外侧。应用高斯公式

$$\oiint_{S+S_1+S_2}(x^2-yz)dydz+(yz-2xy)dzdx-z^2dxdy$$

$$=\iiint_V(2x+z-2x-2z)dxdydz$$

$$=\iiint_V -z\,dx\,dy\,dz.$$

作柱坐标变换：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$$

$$0\leqslant r\leqslant 1,$$
$$0\leqslant \theta\leqslant 2\pi,$$
$$0\leqslant z\leqslant 1.$$

$$\text{上式}=-\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 zr\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=-2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{S_1}=-\iint_{D_{xy}}-dx\,dy=0,$$

$$\iint_{S_2}=\iint_{D_{xy}}-dx\,dy=-\pi,$$

$$\iint_S=\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}$$

$$=-\frac{\pi}{2}-0-(-\pi)$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

七、由已知条件，得$S_0=\pi RH+\pi R$

容量为 $$V=\frac{\pi R^3}{2}H,$$

$$F(R,H,\lambda)=\frac{\pi R^2}{2}H+\lambda(\pi RH+\pi R^2-S_0).$$

$$F_R'=\pi RH+\lambda\pi H+2\lambda\pi R \quad ①$$

$$F_H'=\frac{R^2}{2}\pi+\lambda\pi R \quad ②$$

$$F_\lambda'=\pi RH+\pi R^2-S_0 \quad ③$$

令　　　$F_R'=0$，$F_H'=0$，$F_\lambda'=0$。

由②式解得

$$\lambda=-\frac{R}{2},$$

代入①，得

$$H=2R,$$

将H的值代入③，得

$$R=\sqrt{\frac{S_0}{3\pi}},\quad H=2\sqrt{\frac{S_0}{3\pi}}.$$

答：当$H=2R=2\sqrt{\frac{S_0}{3\pi}}$时，此容器的容积最大。

八、(1)∵　$\ln(a+x^2)=\ln a+\ln\left(1+\frac{x^2}{a}\right)$，

而　$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\therefore\quad \ln\left(1+\frac{x^2}{a}\right)=\frac{x^2}{a}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a}\right)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x^2}{a}\right)^n+\cdots\left(\frac{x^2}{a}\leqslant 1\right)$$

故$\ln(a+x^2)=\ln a+\frac{x^2}{a}-\frac{x^4}{2a^2}+\frac{x^6}{3a^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{na^n}+\cdots$

$$\left(\frac{x^2}{a}\leqslant 1\text{或}|x|\leqslant\sqrt{a}\right).$$

(2) $f(x)$为奇函数，

∴　$a_n=0$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[(-1)^{n+1}+1] \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n=2k-1, \\ 0, & n=2k.\end{cases} \quad (k=1,2,\cdots)$$

九、（1）分离变量，得

$$ydy=\frac{x^2-1}{x^2}dx$$

则 $\int ydy=\int dx-\int\frac{1}{x^2}dx$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}y^2=x+\frac{1}{x}+C_1$$

$$\Rightarrow\quad y^2=2x+\frac{2}{x}+C$$

将初始条件 $y\Big|_{x=1}=0$ 代入上式，得

$$C=-4.$$

故所求的特解为：

$$y^2=2x+\frac{2}{x}-4.$$

（2）由 $\lambda^2-\lambda-2=0$

$\Rightarrow\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1,$

∴ 齐次方程的通解为：

$$y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

设方程①的特解为

$$y^*=A\sin x+B\cos x,$$

则y^*满足方程①：

$$(y^*)''-(y^*)'-2y^*=10\sin x,$$

$$(y^*)'=A\cos x-B\sin x,$$

$$(y^*)''=-A\sin x-B\cos x,$$

$$(-3A+B)\ \sin x+(-A-3B)\cos x=10\sin x.$$

比较方程两边对应项的系数，得

$$\begin{cases}-3A+B=10,\\ -A-3B=0.\end{cases}$$

解之，得

$$A=-3,\qquad B=1.$$

$$\therefore\quad y^*=-3\sin x+\cos x$$

故方程①的通解为：

$$\begin{aligned}y&=y_1+y^*\\&=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-3\sin x+\cos x.\end{aligned}$$

自我检查题（二）

一、填空题：

（1）向量$\vec{a}$、$\vec{b}$互相垂直的充要条件是________。

（2）设$f(x,\ y)=\ln(x-y-1)$，则$f(x,y)$的定义域为________________。

（3）过点（1，-1,0）且与平面$2x+z=S$垂直的直线标准方程是____________。

（4）判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}$的收敛性，答：________。

（5）设$f(x,\ y)=e^{-x}\sin(x+y)$，则 $f'_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=$______。

（6）力$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$沿光滑曲线由点$A$到点$B$一段弧$\widehat{AB}$上所作的功，可用曲线积分表示为$W=$________。

二、设函数$z=z(x, y)$由方程$z^3-2xz+x^2+y^2=1$确定，求曲面在点（1,1,1)处的切平面方程。

三、$u=f(ax+by, cx^2+dy^2)$，a、b、c、d为已知常数，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$。

四、求圆柱体$x^2+y^2\leqslant 1$被抛物面$z=1-(x^2+y^2)$及坐标面xoy所截部分的曲顶柱体体积。

五、利用格林公式计算曲线积分

$$\oint_C (x^2+y^2)dx+xydy,$$

其中C为上半圆周：$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ y>0\end{cases}$及$x$轴围成的闭曲线沿逆时针方向。

六、设锥面壳$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$具有密度$\mu(x, y, z)=z$，试求其质量。

七、今要做一个容积为V的圆柱形无盖铁桶，问圆柱形铁桶尺寸如何，才能使所用的铁皮最省？

八、展开函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

为富氏级数，并指出当$x=-\pi$，$x=0$和$x=\pi$时级数收敛于何值？

九、(1)求微分方程$y'\text{tg}x-y\ln y=0$的通解。

(2)求微分方程$(1+x)dy+(y+x^2+x^3)dx=0$满足初始条件$y\Big|_{x=0}=1$的特解。

(3)求解线性微分方程$y''+4y=\frac{1}{2}\cos 3x$。

自我检查题（二）答案

一、（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

（2）$x-1>y$.

（3）$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$.

（4）绝对收敛$\left(\because\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}，而\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}收敛\right)$.

（5）-1.

（6）$\int P(x, y)dx+Q(x, y)dy\ \left(或\int_{\widehat{AB}}\overrightarrow{Fdl}\right)$.

二、$F(x, y, z)=z^3-2xz+x^2+y^2-1$.

$F_x'=-2z+2x$，$F_x'(1, 1, 1)=0$，

$F_y'=2y$，　　　$F_y'(1, 1, 1)=2$，

$F_z'=-2x+3z^2$，$F_z'(1, 1, 1)=1$.

所以在点（1,1,1）处曲面的切平面方程为

$$0\cdot(x-1)+2\cdot(y-1)+1\cdot(z-1)=0,$$

或　$2y+z=3$.

三、解法一：$\because u=f(ax+by, cx^2+dy^2)$，

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=af_1'+2cxf_2';$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=bf_1'+2dyf_2'.$$

解法二：令$\varphi=ax+by$，$\psi=cx^2+dy^2$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$=a\frac{\partial u}{\partial \varphi}+2cx\frac{\partial u}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$=b\frac{\partial u}{\partial \varphi}+2dy\frac{\partial u}{\partial \psi}.$$

四、解法一：用极坐标表示二重积分：

$$V=\iint\limits_D z d\sigma,$$

其中D：$x^2+y^2\leqslant 1$，

即 $\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 1,\\ 0\leqslant\theta<2\pi.\end{cases}$

$z=4-x^2-y^2 \Longrightarrow z=4-r^2$，

$$\therefore\quad V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(4-r^2)rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_1^0 d\theta$$

$$=\frac{7}{4}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{7}{2}\pi$$

解法二：用直角坐标表示二重积分：

$$V=\iint\limits_D z dxdy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}[4-(x^2+y^2)]dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[8\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-2x^2\sqrt{1-x^2}\right]dx$$

$$=4\int_0^1\left[4\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-x^2\sqrt{1-x^2}\right]dx$$

$$\underline{\underline{令x=\sin\theta}}\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta d\theta-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{7}{2}\pi.$$

解法三：利用三重积分：

$$V=\iiint_V dV$$

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{4-(x^2+y^2)}dz$$

$$\left(或=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{4-r^2}dz,用柱坐标\right)$$

$$=\frac{7}{2}\pi.$$

五、曲线C的草图如图7—3所示。

$$\oint_C(x^2+y^2)dx+xydy$$

$$=\iint_D(y-2y)dxdy$$

$$=\iint_D-ydxdy.$$

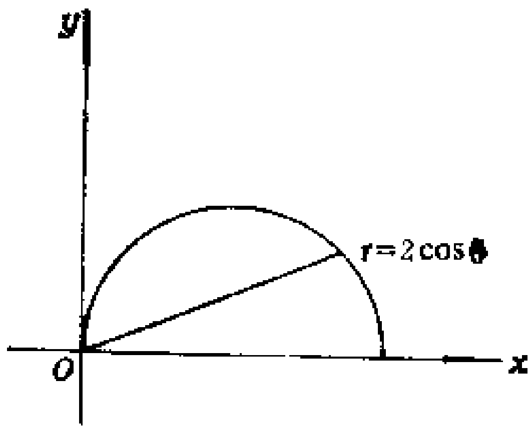


图 7—3

作极坐标变换：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

于是 $\iint\limits_{D} -y\,dxdy$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r\sin\theta r dr$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\sin\theta\cos^3\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\cos\theta$$

$$=\frac{8}{3\times 4}\cos^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{8}{12}$$

$$=-\frac{2}{3}.$$

六、根据对面积的曲面积分的物理意义，密度为$\mu(x,y,z)=z$的曲面的质量为

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\mu(x,y,z)dq=\iint\limits_{\Sigma}z dq,$$

其中Σ是锥面壳.

$\because\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$\therefore\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2},$$

于是$M=\iint\limits_{D_{xy}} z\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

D_{xy}是Σ在xoy平面上的投影区域，显然是圆：$x^2+y^2\leqslant 1$。

$$\text{故}\quad M=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho\cdot\rho d\rho$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi.$$

答：锥面壳的质量是 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$。

七、本题是求铁桶表面积

$$S=2\pi rh+\pi r^2$$

在条件$\pi r^2h=V$下的极值问题。其中r、h分别为圆柱形铁桶的底面半径和高。

$$F=2\pi rh+\pi r^2+\lambda(\pi r^2h-V)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial r}=2\pi h+2\pi r+2\lambda\pi rh=0 & ①\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial h}=2\pi r+\lambda\pi r^2=0 & ②\\[2ex] \pi r^2h=V & ③\end{cases}$$

由①、②解出$r=h$

代入③，得$r=h=\sqrt{\dfrac{V}{\pi}}$。

由于只求得一个驻点，该问题中显然存在最小值，故该驻点就是所求的最小值点，所以$r=h=\sqrt{\dfrac{V}{\pi}}$时，材料最省。

八、$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx$$

$$=\left.\frac{\sin nx}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}$$

$$=0,$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}dx=1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx$$

$$=\left.\frac{-\cos nx}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},$$

$$b_{2k}=0,\qquad b_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)\pi}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

$$(-\pi,\ 0),\ (0,\ \pi)$$

当$x=0$时，级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

当$x=-\pi$或$x=\pi$时，级数收敛于

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

九、(1)分离变量，得

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{d(\sin x)}{\sin x},$$

则 $\ln(\ln y)=\ln(\sin x)+\ln C$

$\Rightarrow$ $\ln y=C\sin x$

$\therefore$ $y=e^{C\sin x}$

(2) 解法一：$(1+x)dy+(y+x^2+x^3)dx=0$，

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y+x^2(1+x)}{1+x}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{1+x}=-x^2, \qquad ①$$

这是一阶线性方程，通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}\left[\int -x^2 e^{\int\frac{1}{1+x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{1+x}\left[\int -x^2(1+x)dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{1+x}\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+C\right].$$

$$y\Big|_{x=0}=C=1,$$

$\therefore$ 特解为

$$y=\frac{1}{1+x}\left(1-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right).$$

解法二：应用常数变易法。

令$y=v(x)e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}$ ②

则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}-\frac{1}{1+x}v(x)e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}$ ③

将②、③代入①，解得

$$\frac{dv}{dx}=-x^2 e^{\int\frac{1}{1+x}dx},$$

$$v(x)=\int -x^2(1+x)dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+C\ ,$$

通解为：

$$y=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+C\right]e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}$$

$$=\frac{1}{1+x}\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+C\right]$$

特解同上。

解法三：$(1+x)\ dy+(y+x^2+x^3)dx=0$,

$P(x,\ y)=y+x^2+x^3$,

$Q(x,\ y)=1+x$.

$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以是全微分方程。取$x_0=0$, $y_0=0$,

$$\int_0^x(y+x^2+x^3)dx+\int_0^y 1dy=C,$$

$$yx+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+y=C,$$

通解为：

$$y=\frac{1}{1+x}\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+C\right].$$

特解同上。

（3）这是二阶常系数线性微分方程，其齐次方程的特征方程是：

$$r^2+4=0,$$

特征根是：$r=\pm 2i$.

齐次方程的通解为：

$$y_1=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

由于$3i$不是特征方程的根，设特解为：

$$y^*=a\cos 3x,$$

$$(y^*)'=-3a\sin 3x,$$

$$(y^*)''=-9a\cos 3x,$$

代入原方程，得

$$-9a\cos 3x+4a\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 3x$$

$$\Rightarrow -5a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{10}.$$

于是 $y^*=-\frac{1}{10}\cos 3x$.

故原方程的通解为：

$$y=y^*+y_1$$

$$=-\frac{1}{10}\cos 3x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

自我检查题（三）

一、填空题：

（1）已知向量$\vec{a}=\{1,-1,2\}$，$\vec{b}=\{2,-2,2\}$，则过点M 3，0，－4）且与$\vec{a}$、$\vec{b}$都垂直的直线方程是______________.

（2）函数 $z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$ 的定义域是________.

（3）过点（1,1,1），且与平面$x+y+z=100$平行的平面方程是__________。

（4）幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$的收敛半径是__________。

（5）设$\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$，则$\frac{\partial\theta}{\partial y}=$________。

二、求与已知向量$\vec{a}=4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$同时垂直的向量。

三、设$z=uv$，且$u=x^2-y^2$，$v=e^{xy}$，

求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$dz$。

四、（1）计算二重积分

$$\iint\limits_D x^3y\,dx\,dy,$$

其中D为抛物线$y^2=x$与直线$y=x$围成的区域。

（2）计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\,dz,$$

其中Ω由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$、$z=\sqrt{8-x^2-y^2}$围成。

五、利用格林公式计算曲线积分

$$\oint\limits_C 2x^2y\,dx+x(x^2+y^2)\,dy,$$

其中C为圆周$x^2+y^2=a^2$，取反时针方向。

六、计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z^2}{a^2}dS,$$

其中曲面Σ为上半球面：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$。

七、一个长方体的三面在坐标面上，与原点相对的顶点M在平面$x+y+z=9$上（如图7—4）。求这长方体的最大体积.

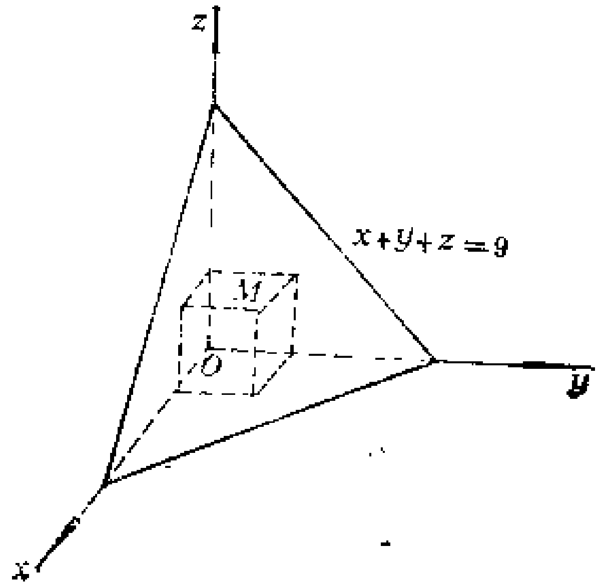


图 7—4

八、展开函数$f(x)=\sin x(0\leqslant x<\pi)$为余弦级数。

九、（1）求方程$x^2yy'=x^2-3$满足初始条件$y\Big|_{x=1}=3$的特解。

（2）求方程$y''-3y'+2y=e^{2x}$的通解。

自我检查题（三）答案

一、（1）$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{0}$.

（2）$x^2+y^2\leqslant 4$.

（3）$x+y+z=3$（或$(x-1)+(y-1)+(z-1)=0$）.

（4）$\dfrac{1}{3}$.

（5）$\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

二、向量$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$同时垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 7 & 3\\ 3 & -5 & 1\end{vmatrix}=22\vec{i}+5\vec{j}-41\vec{k},$$

故同时垂直于$\vec{a}$和$\vec{b}$的向量为

$$\vec{c}=k(22\vec{i}+5\vec{j}-41\vec{k}) \qquad (k\text{为任意实数}).$$

三、解法一：$dz=vdu+udv$,

$$du=2xdx-2ydy,$$

$$dv=ye^{xy}dx+xe^{xy}dy,$$

将du、dv代入dz，得

$$\begin{aligned}dz&=v(2xdx-2ydy)+u(ye^{xy}dx+xe^{xy}dy)\\&=(2xv+ye^{xy}u)dx+(xe^{xy}u-2yv)dy\\&=e^{xy}(2x+x^2y-y^3)dx+e^{xy}(x^3-xy^2-2y)dy.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}(2x+x^2y-y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}(x^3-xy^2-2y).$$

解法二：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$=v2x+ue^{xy}y$$

$$=e^{xy}(2x+x^2y-y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=v(-2y)+ue^{xy}x$$

$$=e^{xy}(x^3-xy^2-2y),$$

$$dz=e^{xy}(2x+x^2y-y^3)dx+e^{xy}(x^3-xy^2-2y)dy.$$

四、（1）如图7—5。

$$\iint\limits_D x^3ydxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_x^{\sqrt{x}}x^3ydy$$

$$=\int_0^1 x^3\frac{y^2}{2}\Big|_x^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3(x+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\frac{x^6}{6}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{60}.$$

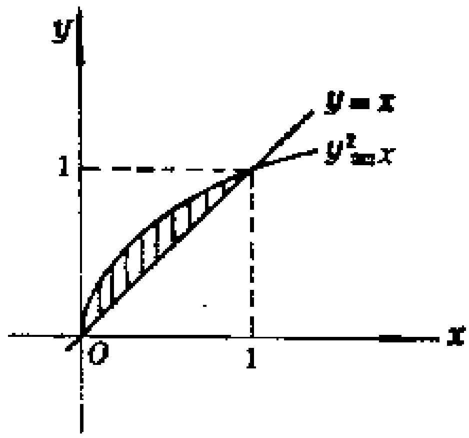


图 7—5

或 $\iint\limits_D x^3ydxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}x^3ydx$$

$$=\int_0^1 ydy\int_{y^2}^{y}x^3dx$$

$$=\int_0^1 y\frac{x^4}{4}\Big|_{y^2}^{y}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y^5}{4}-\frac{y^9}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{60}$$

$$=\frac{1}{60}.$$

（2）**解法一：如图7—6。**

设两曲面在 xoy 平面投影区域为 D_{xy}，则由两曲面联立解出 D_{xy} 为：$x^2+y^2\leqslant 4$.

由柱坐标变换

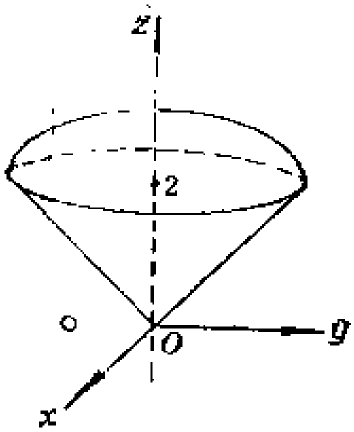


图 7—6

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$$

得

$$I = \iiint\limits_{\Omega} zr\,d\theta\,dr\,dz.$$

其中 Ω'：$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant r \leqslant 2$，$r \leqslant z \leqslant \sqrt{8-r^2}$．化三重积分为逐次积分，得

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r\,dr \int_r^{\sqrt{8-r^2}} z\,dz$$

$$= \pi \int_0^2 (8r - 2r^3)\,dr$$

$$= 8\pi。$$

解法二：利用球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases}$$

得

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{\sqrt{8}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$=8\pi.$$

五、C围成的区域是圆，记为D：

$$x^2+y^2\leqslant a^2.$$

又$P(x, y)=2x^2y$, $Q(x, y)=x(x^2+y^2)$,

显然，P、Q在D内连续，并且有一阶连续偏导数，满足格林公式条件，用格林公式计算曲线积分：

$$\oint_C 2x^2ydx+x(x^2+y^2)dy$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^2\cdot\rho d\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a$$

$$=\frac{\pi}{2}a^4.$$

六、$\because\quad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,

$$\therefore\quad\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

$$\iint_\Sigma\frac{z^2}{a^2}dS$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

其中D_{xy}是Σ在xoy平面上的投影，是圆：

$$x^2+y^2\leqslant a^2.$$

用极坐标计算，得到

$$\frac{1}{a^2}\iint\limits_{D_{xy}}(a^2-x^2-y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,rdr$$

$$=\frac{2\pi}{a}\int_0^a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-r^2}\,d(a^2-r^2)$$

$$=-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{2}{3a}\pi a^3$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^2.$$

七、M点的坐标为(x, y, z)，则这长方体的体积$V=xyz$. 本题是求长方体的体积V在条件$x+y+z=9$下的极值问题.

$$F(x, y, z, \lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-9),$$

$$\begin{cases}F_x'=yz+\lambda=0 & ①\\ F_y'=xz+\lambda=0 & ②\\ F_z'=xy+\lambda=0 & ③\\ F_\lambda'=xy+z-9=0 & ④\end{cases}$$

①$\times x+$②$\times y+$③$\times z$，得

$$3xyz+\lambda(x+y+z)=0.$$

由④式，得

$$\lambda=-\frac{1}{3}xyz \qquad ⑤$$

⑤代入①，得

$$x=3,$$

把⑤分别代入①，②，③，得

$x=3,\ y=3,\ z=3.$

故$V_{最大}=27.$

答：这长方体的最大体积是27。

八、$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx.$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}\quad(n\neq 1)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{[1+(-1)^n](n-1-n-1)}{n^2-1}$$

$$=\frac{-2[1+(-1)^n]}{(n^2-1)\pi},$$

$$\therefore\quad a_{2k-1}=0,\qquad a_{2k}=\frac{-4}{(4k^2-1)\pi}.$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2 x}{2}\bigg|_0^{\pi}=0.$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1},\ [0,\pi).$$

九、（1）分离变量，得

$$ydy=\left(1-\frac{3}{x^2}\right)dx,$$

则 $\int y\,dy=\int\left(1-\frac{3}{x^2}\right)dx$,

$$\frac{1}{2}y^2=x+\frac{3}{x}+C_1,$$

$$\Rightarrow\quad y^2=2x+\frac{6}{x}+C\qquad (C=2C_1).$$

将初始条件代入，得

$$9=2+6+C,$$

$\therefore\quad C=1.$

故方程满足初始条件的特解为：

$$y^2=2x+\frac{6}{x}+1\ .$$

（2）对应的齐次方程的特征方程：

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

$$\therefore\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$$

齐次方程的通解为：

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

设非齐次方程的特解为：

$$y^*=Axe^{2x}.$$

$$\because\quad (y^*)'=Ae^{2x}+2Axe^{2x},$$

$$(y^*)''=4Ae^{2x}+4Axe^{2x},$$

代入原方程，得

$$A=1,$$

$\therefore\quad y^*=xe^{2x}$

故原方程的通解为：

$$y=y_1+y^*$$

$$=xe^{2x}+C_1e^x+C_2e^{2x},$$

（C_1, C_2为任意常数）.